NÍVEL III

PROVA 1 - 1ª FASE

OLIMPÍADA DE MATEMÁTICA DO POLIEDRO

Instruções para a prova

1. Verifique se este caderno de questões contém um total de 25 questões de múltipla escolha. Caso o caderno apresente alguma diferença, solicite ao fiscal da sala um outro caderno de questões. Não serão aceitas reclamações posteriores.

2. Para cada questão, existe apenas uma resposta correta.

3. Você deve ler cuidadosamente cada uma das questões e escolher a alternativa que corresponda à resposta adequada. Essa alternativa (a, b, c, d ou e) deve ser preenchida completamente no item correspondente na folha de respostas que você recebeu, segundo o modelo abaixo. Observe:

ERRADO ERRADO ERRADO CORRETO

4. Não será permitida nenhuma espécie de CONSULTA nem o uso de máquina calculadora.

5. É proibido pedir ou emprestar qualquer material durante a realização da prova.

6. Você terá 3 horas para responder a todas as questões e preencher a folha de respostas.

7. Não é permitida a saída antes de 90 minutos de duração da prova.

Boa prova!

SISTEMA DE ENSINO POLIEDRO

1 Sendo **n** um quadrado perfeito, pode-se afirmar corretamente que a expressão $\sqrt[\sqrt{n}]{n}$ é igual a:

a) $\sqrt{n}$
b) $\sqrt{n\sqrt{n}}$
c) $n\sqrt{n}$
d) $\sqrt[n]{n^{\sqrt{n}}}$
e) n

2 Sendo **x** um número real, considere as seguintes implicações:

I. Se $4 - 2x < 0$, então $x < 2$;
II. Se $5x - 10 > 0$, então $x > 1$;
III. Se $4^x > 8$, então $x > 2$;
IV. Se $0{,}1^x < 0{,}1^3$, então $x > 3$.

São verdadeiras apenas as implicações:

a) I e III.
b) I e IV.
c) II e IV.
d) II e III.
e) I e III.

3 Dados dois conjuntos numéricos não vazios **A** e **B**, considere os conjuntos **R**, **F** e **P**, tais que:

– **R** é o conjunto de todas as possíveis **relações** entre os elementos dos conjuntos **A** e **B**, tais que cada elemento do conjunto **A** esteja associado a pelo menos um elemento do conjunto **B**.

– **F** é o conjunto de todas as possíveis **funções** de **A** em **B**.

– **P** é o conjunto das **partes** do produto cartesiano $A \times B$.

Sendo assim, é correto afirmar que:

a) $P \subset R \subset F$
b) $F \subset R \subset P$
c) $F \subset P \subset R$
d) $R \subset P \subset F$
e) $R \subset F \subset P$

4 A soma das soluções reais da equação $10^{\sqrt{\log x}} = x$ é:

a) 1
b) 5
c) 10
d) 11
e) 20

5 Seja **u** uma função definida no universo dos números naturais, tal que u(x) seja igual ao algarismo das unidades do número **x**.

Assim, sendo $\mathbf{x_1}$ e $\mathbf{x_2}$ dois números naturais, assinale a alternativa correta.

a) $u(x_1 + x_2) = u(x_1) \cdot u(x_2)$
b) $u(x_1 \cdot x_2) = u(x_1) + u(x_2)$
c) $u(x_1 - x_2) = u(x_1) - u(x_2)$
d) $u(x_1 + x_2) = u(x_1) + u(x_2)$
e) $u(x_1 + x_2) = u(\,u(x_1) + u(x_2)\,)$

6 Observando que $\frac{1}{n} - \frac{1}{n+2} = \frac{2}{n(n+2)}$, considere a parcela **p** que torna a igualdade a seguir verdadeira para todo inteiro positivo $n > 5$: $\frac{1}{3} + \frac{1}{8} + \frac{1}{15} + \frac{1}{24} + \frac{1}{35} + \ldots + \frac{1}{n(n+2)} = \frac{-1}{2n^2 + 6n + 4} + p$.

Nestas condições, pode-se afirmar corretamente que **p** é:

a) constante.
b) diretamente proporcional ao valor de n.
c) diretamente proporcional ao valor de n^2.
d) inversamente proporcional ao valor de n.
e) inversamente proporcional ao valor de n^2.

Considere a seguinte tabela para responder às questões de 7 a 9.

n	Divisores positivos de n
28	1, 2, 4, 7, 14 e 28
32	1, 2, 4, 8, 16 e 32
220	1, 2, 4, 5, 10, 11, 20, 22, 44, 55, 110 e 220
284	1, 2, 4, 71, 142 e 284

7 Um número natural é dito "perfeito" quando é igual à soma de todos os seus divisores positivos menores do que ele.

Euclides provou que, sendo **n** um número primo, a fórmula $2^{n-1}(2^n - 1)$ gera um número perfeito par sempre que $(2^n - 1)$ também é um número primo.

Assinale a alternativa que apresenta uma expressão idêntica à fórmula de Euclides.

a) $4^{n-1} - 2^{n-1}$
b) $4^{n-1} - 2^n$
c) $\frac{4^{n-1} - 2^n}{2}$
d) $\frac{4^n - 2^n}{2}$
e) $\frac{2^{2n-1} - 2^n}{2}$

8 Considere que um número natural é "quase perfeito" se for o sucessor da soma de seus divisores positivos menores do que ele. Assinale a alternativa que apresenta uma fórmula capaz de gerar números "quase perfeitos" para todo **n** inteiro positivo.

a) $3^{n-1} + 1$
b) $2^n + 1$
c) 2^n
d) $4^n - 1$
e) $4^{n-1} - 1$

9 Dois números naturais **a** e **b** são ditos "amigos" quando sua soma, a+b, coincide tanto com a soma dos divisores positivos de **a**, quanto com a soma dos divisores positivos de **b**.

Então, considerando a definição de números "amigos" e as definições de números "perfeitos" e "quase perfeitos" das questões anteriores, é correto afirmar que:

a) se dois números são "amigos", então pelo menos um deles é "perfeito".
b) se dois números são "amigos", então pelo menos um deles é "quase perfeito".
c) todo número "perfeito" é "amigo" de um número "quase perfeito".
d) todo número "perfeito" é "amigo" de si mesmo.
e) todo número "quase perfeito" é "amigo" de si mesmo.

10 Qual é o algarismo das unidades do número $2.012^{2.012}$?

a) 2
b) 4
c) 6
d) 8
e) 0

11 Qual é a maior potência de 6 que pertence ao conjunto dos divisores do número 66! ?

a) 6^{11}
b) 6^{12}
c) 6^{22}
d) 6^{31}
e) 6^{64}

12 Sendo **n** um número natural, então é correto afirmar que todo número **y**, tal que $y = 2^n + (-1)^{n+1}$, é necessariamente divisível por:

a) 2
b) 3
c) 5
d) 6
e) 7

13 Uma pessoa que dispõe de apenas quinze notas de R$ 10,00, oito notas de R$ 20,00 e duas notas de R$ 50,00 quer comprar uma mercadoria que custa R$ 150,00. De quantas formas distintas ela pode efetuar o pagamento, sem que haja troco?

a) 13
b) 14
c) 15
d) 16
e) 17

Texto para as questões 14 e 15.

Um jogo é composto de vinte cartas com um algarismo em uma de suas faces. Para cada algarismo de 0 a 9, há duas cartas.

As cartas são embaralhadas e enfileiradas sobre uma mesa com as faces numeradas viradas para baixo, e cada jogador retira duas cartas, uma após a outra, para formar um número de dois algarismos, sendo que a primeira carta retirada será a do algarismo das dezenas e a segunda a do algarismo das unidades. Vence aquele que formar o maior número.

Umberto e Renato aprenderam o jogo e vão disputar entre si. Renato começa retirando suas cartas.

14 Considerando-se que todas as cartas são diferentes, pois estão em posições diferentes sobre a mesa, determine de quantas formas distintas Renato pode retirar suas cartas de modo que a probabilidade de empate seja nula.

a) 10
b) 19
c) 20
d) 21
e) 90

15 Renato escolheu suas cartas e, mantendo-as viradas para baixo, arrastou-as para as posições da dezena e da unidade do número que deveriam formar e disse para Umberto fazer o mesmo, assim virariam as cartas simultaneamente para verificar o resultado.
Qual é a probabilidade de Umberto vencer?

a) 161/323
b) 11/23
c) 1/2
d) 9/20
e) 6/11

16 Uma mensagem foi inicialmente enviada a 729 pessoas pela internet e pedia para que cada pessoa encaminhasse essa mensagem para mais três pessoas no prazo de uma semana. Então, supondo que apenas duas em cada nove das pessoas que recebam esta mensagem atendam ao pedido e que nenhuma pessoa receba novamente a mesma mensagem, quando será que esta mensagem terá atingido um total de 2.500 pessoas?

a) Daqui a um mês.
b) Daqui a um ano.
c) Daqui a uma década.
d) No próximo século.
e) Nunca.

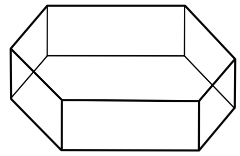
17 Uma reunião de condomínio foi organizada para se escolher quatro membros para uma comissão que deveria ser composta de dois homens, um casado e um solteiro, e duas mulheres, uma casada e uma solteira, dentre os moradores adultos do condomínio. Então, se neste condomínio moram exatamente 50 homens adultos, 45 mulheres adultas, mas apenas 30 casais casados, de quantas formas esta comissão pode ser escolhida, de modo que os integrantes casados não sejam do mesmo casal?

a) 63.000
b) 261.000
c) 270.000
d) 1.062.000
e) 4.850.100

18 Quantos números naturais de quatro algarismos distintos não apresentam dois algarismos pares adjacentes?

a) 1.040
b) 1.260
c) 1.940
d) 2.300
e) 2.560

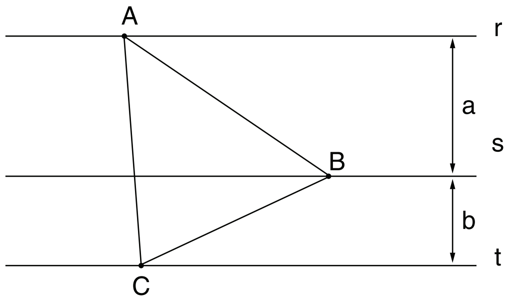
19 A figura a seguir representa um prisma hexagonal regular. Trata-se de um poliedro com 12 vértices, 18 arestas e 8 faces, sendo 6 retângulos e 2 hexágonos regulares.



De quantas formas distintas podemos escolher um par de arestas reversas desse prisma?

a) 96
b) 84
c) 72
d) 56
e) 36

20 Considere três retas paralelas **r**, **s** e **t**, tal que a distância entre **r** e **s** é **a** e entre **s** e **t** é **b**, conforme a figura. Sobre estas retas apoia-se um triângulo equilátero de vértices **A**, **B** e **C**.



Determine a área deste triângulo.

a) $a^2 + ab + b^2$

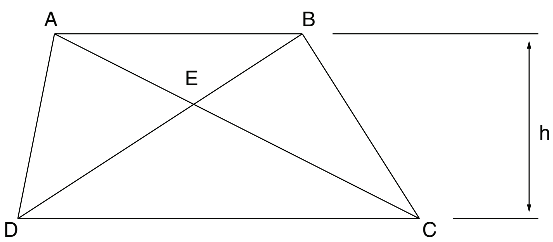
b) $\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot(a^2+ab+b^2)$

c) $(a+b)^2\cdot\sqrt{3}$

d) $\frac{a^2+ab+b^2}{\sqrt{3}}$

e) $\frac{2}{3}\cdot(a^2+ab+b^2)$

21 Na figura a seguir, temos um trapézio ABCD e suas diagonais $\overline{AC}$ e $\overline{BD}$. Os triângulos AEB e DEC possuem áreas α e β, respectivamente.



Se a altura deste trapézio é **h**, determine a base média deste trapézio.

a) $\frac{\alpha+\sqrt{\alpha\beta}+\beta}{h}$

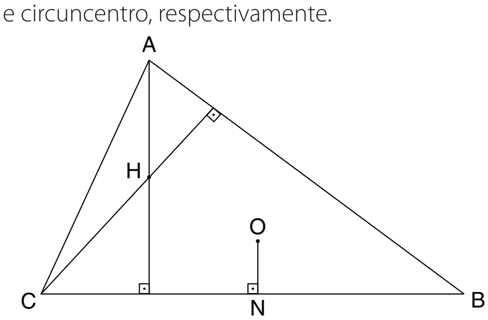
b) $\frac{\sqrt{\alpha\beta}}{h^2}$

c) $\frac{\alpha+2\beta}{h}$

d) $\left(\sqrt{\frac{\alpha}{h}}+\sqrt{\frac{\beta}{h}}\right)^2$

e) $\frac{(2\alpha+\beta)^2}{h}$

22 O triângulo ABC da figura é acutângulo e **H** e **O** seu ortocentro e circuncentro, respectivamente.



Podemos afirmar que $\frac{AH}{ON}$ é igual a:

a) 2

b) $\sqrt{3}$

c) $2\sqrt{2}$

d) $\frac{3}{2}$

e) $\frac{5}{2}$

23 Um triângulo retângulo possui ângulos agudos iguais a α e β. Determine o valor de $tg\left(\frac{\alpha}{2}\right)\cdot tg\left(\frac{\beta}{2}\right)$ em função dos raios das circunferências inscrita (r) e da circunscrita (R).

a) $\frac{R}{2r+R}$

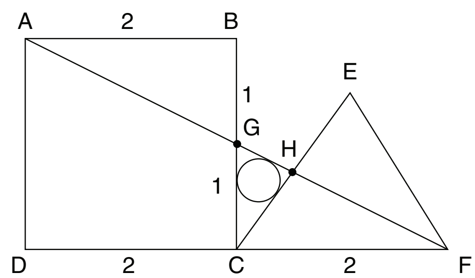
b) $\frac{r}{2r+r}$

c) $\frac{R}{2R+r}$

d) $\frac{R}{2R+2r}$

e) $\frac{R}{R-r}$

24 Na figura a seguir, ABCD e CEF são respectivamente um quadrado e um triângulo equilátero de lado 2. As bases $\overline{DC}$ e $\overline{CF}$ são colineares. A reta $\overleftrightarrow{AF}$ intersecta o lado do quadrado e do triângulo nos pontos G e H.



Determine o raio da circunferência inscrita no triângulo CGH.

a) $\frac{\sqrt{5}+1}{4}$

b) $\frac{2}{3+2\sqrt{3}+\sqrt{5}}$

c) $\frac{1}{\sqrt{3}+\sqrt{5}+2}$

d) $\frac{2}{3+\sqrt{3}+\sqrt{5}}$

e) $\frac{3}{3+2\sqrt{3}+\sqrt{5}}$

25 Em um ΔABC, cujo baricentro é G, a reta determinada pelo vértice A e pelo ponto médio M do segmento $\overline{BG}$ intercepta o lado $\overline{BC}$ em E. Determine a razão EB : EC.

a) $\frac{1}{2}$

b) $\frac{2}{3}$

c) $\frac{1}{4}$

d) $\frac{1}{6}$

e) $\frac{2}{5}$

3ª PROVA
FRANCISCO.SILVA
24-04-2012 (11:34)