NÍVEL III

PROVA 1 - 1ª FASE

OLIMPÍADA DE MATEMÁTICA DO POLIEDRO

Instruções para a prova

1. Verifique se este caderno de questões contém um total de 9 questões.
   Caso o caderno apresente alguma diferença, solicite ao fiscal da sala um outro caderno de questões.
   Não serão aceitas reclamações posteriores.
2. Não será permitida nenhuma espécie de CONSULTA, nem o uso de máquina calculadora.
3. É proibido pedir ou emprestar qualquer material durante a realização da prova.
4. Você terá 4 horas e 30 minutos para responder a todas as questões e preencher a folha de respostas.
5. Não é permitida a saída antes de 60 minutos de duração da prova.

2ª PROVA
RODOLFO
27-04-2011 (14:35)

Boa prova!

SISTEMA DE ENSINO POLIEDRO

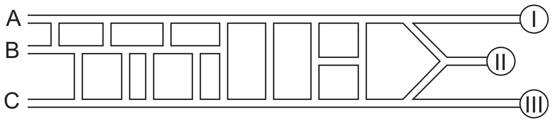
1 Sobre o conjunto S das soluções reais da equação $\sqrt{\dfrac{4x^2}{(x-10)^2}} = 3$ são feitas as seguintes afirmações:

I. S possui exatamente dois elementos.
II. A soma dos elementos de S é 36.
III. Não há elementos negativos em S.

Quais são as afirmações verdadeiras?
a) Apenas a afirmação I.
b) Apenas as afirmações II e III.
c) Apenas as afirmações I e III.
d) Apenas as afirmações I e II.
e) Todas são verdadeiras.

Texto para as questões 2 e 3.

A figura a seguir apresenta o esquema das principais avenidas e ruas que ligam os bairros A, B e C, da região norte de certo município, aos três principais polos comerciais situados na região central.

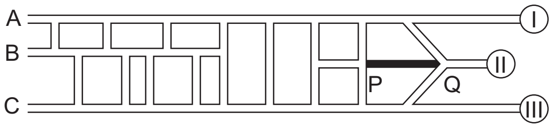


Nesse município, o departamento de trânsito define como *"bom caminho bairro-centro"* qualquer trajeto desse esquema que não apresente nenhum trecho que deva ser percorrido no sentido centro-bairro ou que afaste desnecessariamente o veículo do seu destino.

A tabela a seguir apresenta o número de *"bons caminhos"* que podem ser feitos de cada bairro a cada polo comercial.

	A	B	C
I	1	4	13
II	1	9	1
III	16	5	1

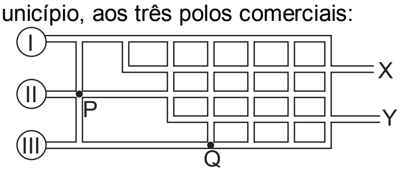
2 O prefeito desse município pretende construir um túnel ligando os pontos P e Q como mostra a figura:



Depois de concluída a obra, quantos serão os *"bons caminhos"* que ligarão os bairros A, B e C ao polo comercial II, respectivamente?

a) 3, 13 e 2
b) 2, 13 e 2
c) 3, 12 e 3
d) 2, 12 e 2
e) 3, 13 e 3

3 A figura a seguir apresenta o esquema das principais avenidas e ruas que ligam os bairros X e Y, da região sul desse município, aos três polos comerciais:



Se todas as ruas e avenidas têm mão dupla, qual é o número de "bons caminhos" que pode ser feito de cada bairro a cada polo comercial?

a)

	I	II	III
X	6	5	25
Y	4	5	41

b)

	I	II	III
X	5	5	20
Y	5	5	40

c)

	I	II	III
X	4	5	25
Y	6	5	40

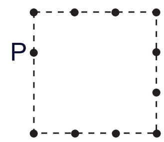
d)

	I	II	III
X	5	5	20
Y	5	5	41

e)

	I	II	III
X	6	5	20
Y	4	5	40

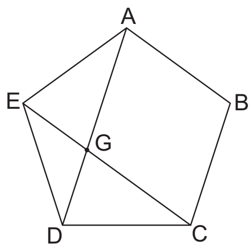
4 São dados onze pontos distintos situados no contorno de um quadrado de lado 3 cm, de tal forma que quatro desses pontos coincidam com os vértices do quadrado, como mostra a figura:



Se cada um dos outros sete pontos divide algum lado do quadrado na razão de 2 para 1, então a soma das distâncias do ponto P aos outros dez pontos, em centímetros, é:

a) $\left(2+\sqrt{3}\right)\left(1+5\sqrt{2}\right)$
b) $\left(3+\sqrt{5}\right)\left(2+5\sqrt{2}\right)$
c) $\left(2+\sqrt{2}\right)\left(3+2\sqrt{5}\right)$
d) $\left(5+\sqrt{2}\right)\left(3+2\sqrt{3}\right)$
e) $\left(5+\sqrt{3}\right)\left(2+3\sqrt{2}\right)$

5 Na figura, temos o pentágono regular ABCDE e as diagonais $\overline{AD}$ e $\overline{EC}$. Essas diagonais interceptam-se em G. Podemos afirmar que $\dfrac{DG}{GA}$ é igual a:



a) $\dfrac{1}{2}$
b) $\dfrac{1}{3}$
c) $\dfrac{1+\sqrt{5}}{4}$
d) $\dfrac{-1+\sqrt{5}}{2}$
e) $\dfrac{\sqrt{3}}{2}$

6 Sendo x e y dois números reais distintos que satisfazem o sistema $\begin{cases} x+y=8 \\ x\cdot y=2 \end{cases}$, pode-se concluir que a soma dos cubos dos números x e y é igual a

2ª PROVA
RODOLFO
27-04-2011 (14:35)

a) 512 b) 508 c) 486
d) 464 e) 428

Texto para as questões de 7 a 9.

Algumas sequências numéricas podem ser descritas através do que chamamos de lei de recorrência, que, com exceção do primeiro, permite obter qualquer termo a partir do termo anterior.

Chamamos de progressão aritmética (P.A.) toda sequência numérica cuja lei de recorrência seja que a partir do primeiro termo possibilita obter os termos consecutivos através da adição de uma mesma constante, a qual chamamos de razão da PA. Assim, para todo número ordinal n, temos em uma PA de razão r: $a_{n+1} = a_n + r$.

Chamamos de progressão geométrica (P.G.) toda sequência numérica cuja lei de recorrência seja que a partir do primeiro termo possibilita obter os termos consecutivos através da multiplicação de uma mesma constante, a qual chamamos de razão da PG. Assim, para todo número ordinal n, temos em uma PG de razão q: $a_{n+1} = a_n \cdot q$.

Além das progressões aritméticas e geométricas, existem diversos outros tipos de sequências definidas por diferentes leis de recorrência.

7 Da progressão aritmética, definida pela lei de recorrência $a_{n+1} = a_n + 3$ com na $= -40$, foram selecionados quatro termos para iniciar a progressão geométrica: (b_1, b_2, b_3, b_4, ...).

Se os termos selecionados foram: $b_1 = a_{16}$, $b_2 = a_{11}$, $b_3 = a_{21}$, e $b_4 = a_1$, então o quinto termo dessa progressão geométrica é:

a) a_{26} b) a_{36} c) a_{41}
d) a_{61} e) a_{82}

8 Se a, b e c são números reais distintos, tais que as sequências (a, b, c) e (b, a, c) são, respectivamente, uma progressão aritmética e uma progressão geométrica, pode-se afirmar que:

a) a razão da progressão aritmética é igual a -2.
b) a razão da progressão geométrica é igual a -2.
c) a razão da progressão aritmética é igual a 2.
d) a razão da progressão geométrica é igual a 2.
e) as duas progressões têm a mesma razão.

9 A sequência (41, 43, 47, 53, 61,...) obedece à lei de recorrência: $a_{n+1} = a_n + 2n$ com $a_1 = 41$.

Durante algum tempo, acreditou-se que essa sequência era formada apenas por números primos, mas hoje sabemos que isso não é verdade. Assinale a alternativa que apresenta um valor de n para o qual o termo a_{n+1} não é um número primo.

a) 5 b) 10 c) 12
d) 21 e) 40

10 Sejam f e g duas funções de mesmo domínio, tais que $f(x) = (x-2)^2 + 1$ e $g(x) = 2 + \sqrt{x}$. O gráfico da composição $y = f \circ g(x)$, considerando o mais amplo domínio possível, é representado por uma:

a) Parábola b) Semiparábola
c) Reta d) Semirreta
e) Circunferência

Texto para as questões 11 e 12.

O número 2011 tem quatro algarismos que satisfazem duas curiosas propriedades:

I. A soma dos valores absolutos dos dois primeiros é igual à dos dois últimos: $2 + 0 = 1 + 1$.
II. O primeiro algarismo é igual à soma dos valores absolutos dos outros três: $2 = 0 + 1 + 1$.

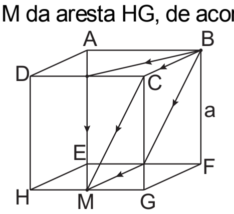
11 Quantos são os números naturais de quatro algarismos que possuem a propriedade I?

a) 615 b) 510 c) 450
d) 375 e) 280

12 Quantos são os números naturais de quatro algarismos que possuem a propriedade II?

a) 65 b) 84 c) 105
d) 120 e) 219

13 Um cubo ABCDEFGH possui aresta igual a **a**. Assinale a alternativa correspondente à menor distância que devemos percorrer sob a superfície do cubo para irmos do vértice B até o ponto médio M da aresta HG, de acordo com a figura.



a) $2a$ b) $\frac{a\sqrt{17}}{2}$
c) $a\left(\frac{\sqrt{5}+2}{2}\right)$ d) $a\left(\frac{2\sqrt{2}+1}{2}\right)$
e) $\frac{3a}{2}$

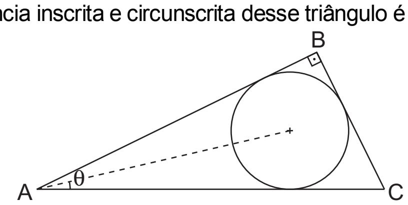
14 Sabendo que a e b são números positivos distintos e não unitários, tais que $\log_b(a + 1) < \log_b a$, podemos concluir que

a) $0 < b < 1$ b) $1 < b < 2$ c) $2 < b < 3$
d) $3 < b < 4$ e) $b > 4$

15 Sendo A um subconjunto qualquer de R com exatamente sete elementos positivos distintos, assinale a alternativa que apresenta o número de elementos da relação $D = \{(x, y) \in A^2 \mid x \le y\}$.

a) 16 b) 24
c) 28 d) 36
e) 49

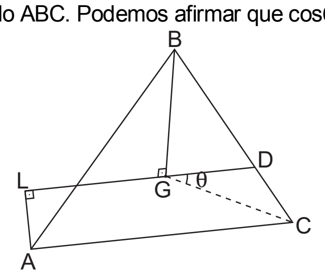
16 Na figura a seguir, o triângulo ABC é retângulo em B. Temos que AB = 5 e $tg\theta = \frac{2}{3}$. A região entre o raio da circunferência inscrita e circunscrita desse triângulo é igual a:



2ª PROVA
RODOLFO
27-04-2011 (14:35)

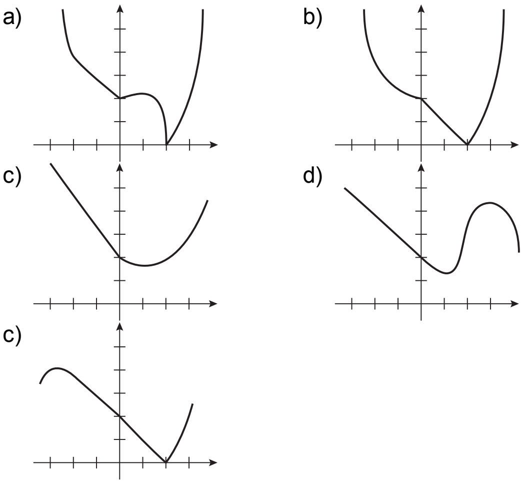
a) $\frac{6}{13}$ b) $\frac{2}{13}$ c) $\frac{3}{13}$
d) $\frac{4}{13}$ e) $\frac{5}{13}$

17 Na figura, temos $BG = LG = 4 \cdot (AL)$; sendo G o baricentro do triângulo ABC. Podemos afirmar que $\cos\theta$ é igual a:



a) $\frac{4}{5}$ b) $\frac{3}{5}$ c) $\frac{2}{3}$
d) $\frac{3}{5}$ e) $\frac{3}{4}$

18 Assinale a alternativa que melhor representa o gráfico da função f(x) que é igual à média aritmética entre os valores dos módulos das expressões $x^2 - 2x$ e $x^2 - 4$.



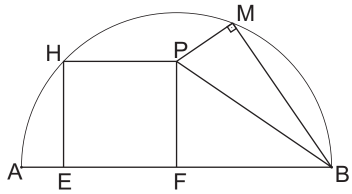
19 Aumentando-se x% no preço de um produto, obtemos um valor dez vezes maior do que seria obtido efetuando-se um desconto de x% no preço desse mesmo produto. Assinale a alternativa que apresenta a melhor aproximação para o número x.

a) 82
b) 75
c) 50
d) 33
e) 25

20 Qual alternativa apresenta um número primo que não pode ser obtido da soma dos algarismos de um número primo de dois algarismos?

a) 5 b) 7
c) 11 d) 13
e) 17

21 Na figura, EFPH é um quadrado e F é o centro da circunferência. Se $(PB) \cdot (BM) = 6\sqrt{2}$, EH é igual a:



a) $\sqrt{2}$ b) $\sqrt{3}$
c) 2 d) 3
e) 1

22 Uma função $f:[-1,1] \to [-1,1]$ é definida pela seguinte expressão:

$$f(x) = \begin{cases} 4x + 4x^2 & \text{se } x \in [-1,0\,] \\ 4x - 4x^2 & \text{se } x \in \,]\,0,1\,] \end{cases}$$

Sobre a função f é incorreto afirmar que

a) $f(-x) = -f(x)$ para todo $x \in [-1, 1]$.
b) $f(x) = 0$ para exatamente três valores distintos de x.
c) $f(x) = x$ para exatamente dois valores distintos de x.
d) $f(x) = -1$ para exatamente um valor de x.
e) f(x) é sobrejetora.

23 Raimundo tem em seu bolso R$ 75,00 em cédulas de R$ 2,00, R$ 5,00 e R$ 10,00. Se a quantidade de cédulas de cada tipo em seu bolso não é a mesma e há pelo menos uma e não mais do que dez cédulas de cada tipo, então o número total de cédulas no bolso de Raimundo não pode ser:

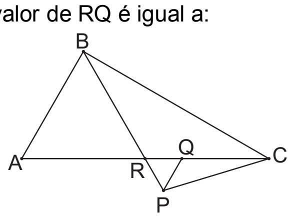
a) 12
b) 14
c) 16
d) 18
e) 19

24 Dividindo-se um número natural N, de dois algarismos distintos, pelo número x, obtemos quociente y e resto 1. Invertendo-se a ordem dos algarismos de N, formamos um número que dividido por y gera quociente x e resto z.

Nessas condições, pode-se afirmar que o resto da divisão do número z pelo número 9 é igual a:

a) 1 b) 2 c) 3
d) 4 e) 5

25 Na figura, temos $BR = 2$; $PR = 1$; $PC = 3$; $AC = 6$ e $\overline{AB} \,//\, \overline{PQ}$. O valor de RQ é igual a:



a) 2 b) 1
c) $\sqrt{2}$ d) $\sqrt{3}$
e) 1,5

2ª PROVA
RODOLFO
27-04-2011 (14:35)