NÍVEL III

PROVA 1 - 1ª FASE

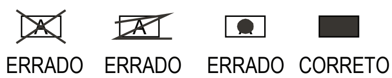
OLIMPÍADA DE MATEMÁTICA DO POLIEDRO

Instruções para a prova

1. Verifique se este caderno de questões contém um total de 25 questões de múltipla escolha. Caso o caderno apresente alguma diferença, solicite ao fiscal da sala um outro caderno de questões. Não serão aceitas reclamações posteriores.

2. Para cada questão, existe apenas uma resposta correta.

3. Você deve ler cuidadosamente cada uma das questões e escolher a alternativa que corresponda à resposta adequada. Essa alternativa (a, b, c, d ou e) deve ser preenchida completamente no item correspondente na folha de respostas que você recebeu, segundo o modelo abaixo. Observe:



4. Não será permitida nenhuma espécie de CONSULTA, nem o uso de máquina calculadora.

5. É proibido pedir ou emprestar qualquer material durante a realização da prova.

6. Você terá 3 horas para responder a todas as questões e preencher a folha de respostas.

7. Não é permitida a saída antes de 90 minutos de duração da prova.

Boa prova!

SISTEMA DE ENSINO POLIEDRO

1 Considere o conjunto A como sendo o domínio da função f definida por:

$$f(x)=\frac{\frac{1}{x-2}}{\frac{1}{1-2x}+\frac{1}{x}}$$

Qual das alternativas a seguir apresenta o conjunto complementar de A em relação ao conjunto dos números reais?

a) {0}
b) {0 , 2}
c) {–1, 0, 2}
d) $\{0, \frac{1}{2}, 2\}$
e) $\{0, \frac{1}{2}, 1, 2\}$

2 Lugar geométrico (LG) é uma figura cujos pontos, e somente eles, possuem uma propriedade característica. Por exemplo, a mediatriz é o lugar geométrico dos pontos do plano que equidistam de dois pontos distintos dados.
Considere agora dois pontos distintos e fixos A e B. Assinale a alternativa correspondente ao lugar geométrico dos pontos P do plano (P; A; B) tais que $(PA)^2 – (PB)^2 = K$, K é uma constante real positiva.

a) Circunferência de centro no ponto médio de $\overline{AB}$ e raio K.
b) Parábola de diretriz $\overline{AB}$ e parâmetro K.
c) Mediatriz de $\overline{AB}$.
d) Reta perpendicular a $\overline{AB}$ em M, tal que AM > MB.
e) Reta perpendicular a $\overline{AB}$ em M, tal que AM < MB.

3 Qual dentre os números a seguir é diferente dos demais?

a) $\frac{2}{\sqrt{2}-1}$
b) $\frac{2\sqrt{2}}{2-\sqrt{2}}$
c) $\frac{2\sqrt{3}}{\sqrt{6}-\sqrt{3}}$
d) $\frac{\sqrt{2}}{2\sqrt{2}-2}$
e) $\frac{2\sqrt{2}+4}{\sqrt{2}}$

4 Qual é o valor numérico da expressão algébrica $\frac{x^3y^3-x^4y^2}{x^3y^3-x^2y^4}$, quando $x = 211050$ e $y = –2010$?

a) 15
b) 105
c) –15
d) –105
e) –51

5 São dados de certo estabelecimento de Ensino Médio que 10 de cada 11 dos seus alunos pretendem ingressar em uma universidade pública. Dentre esses alunos, 75% desejam que tal universidade seja na capital do seu estado.
Sabe-se também que apenas 12% deste último grupo de pessoas moram fora do estado de São Paulo. Dos alunos restantes, 95% prestarão vestibular para ingressar na Universidade de São Paulo (USP).
Assim, qual é a porcentagem do total de alunos dessa escola que deseja ingressar na USP?

a) 50%
b) 57%
c) 65%
d) 70%
e) 82%

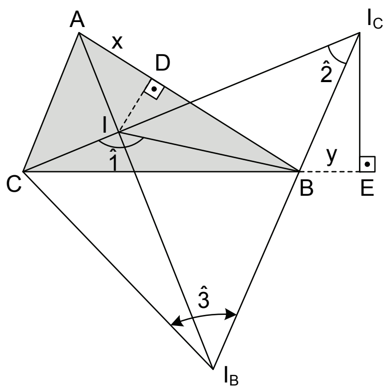
6 Dada uma série de n números reais positivos que não são necessariamente distintos: $(a_1, a_2, a_3, ..., a_n)$, considere as seguintes definições.

I. A média aritmética desses números é:
$$MA=\frac{a_1+a_2+a_3+...+a_n}{n}$$
II. A média geométrica desses números é:
$$MG=\sqrt[n]{a_1\cdot a_2\cdot a_3\cdot ...\cdot a_n}$$
III. A média harmônica desses números é:
$$MH=\frac{n}{\frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_2}+\frac{1}{a_3}+...+\frac{1}{a_n}}$$

Sabendo que a desigualdade $MH \le MG \le MA$ é verdadeira para toda série numérica deste tipo, podemos afirmar que a solução real não nula da equação $x^4=4\sqrt{x}$ pertence ao intervalo:

a) $\left[\frac{7}{11},\frac{5}{7}\right]$
b) $\left[\frac{5}{7},\frac{7}{5}\right]$
c) $\left[\frac{7}{5},\frac{11}{7}\right]$
d) $\left[\frac{11}{7},\frac{19}{11}\right]$
e) $\left[\frac{19}{11},\frac{11}{5}\right]$

7 No triângulo ABC da figura, os ângulos dos vértices A, B e C são, respectivamente, α, β e γ. I, I_B e I_C são, nesta sequência, o incentro e dois ex-incentros do triângulo. Seus lados medem AB = c, AC = b e BC = a.



Analise as afirmações:

I. $\hat{1} = \frac{\alpha}{2} + 90°$

II. $CIBI_B$ é inscritível

III. $\hat{2} = \frac{\alpha}{2}$ e $\hat{3} = 90° - \frac{\alpha}{2}$

IV. $x + y = b + c - a$

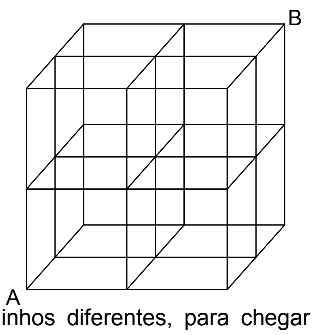
Assinale o número de afirmações corretas.

a) 0
b) 1
c) 2
d) 3
e) 4

8 Na relação $\frac{2^x + 1}{2} + \frac{y}{2^x - 1} = 32$, a variável y assume seu valor máximo quando x pertence a qual dos seguintes intervalos reais?

a) [2,4]
b) [–2,1]
c) [–4,–2]
d) [5,9]
e) [–9,–5]

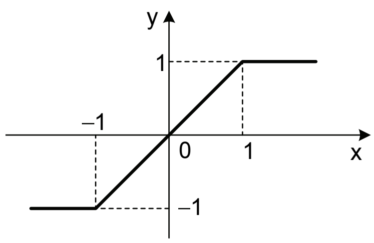
9 A figura a seguir apresenta uma estrutura metálica formada por oito cubos com arestas de cinco centímetros.



Quantos caminhos diferentes, para chegar ao ponto B, uma formiga que se encontra inicialmente no ponto A poderia percorrer, de forma que o comprimento total de sua trajetória sobre as arestas desses cubos não ultrapasse 30 centímetros?

a) 100
b) 90
c) 80
d) 70
e) 60

10 Assinale a alternativa que apresenta a lei de formação da função cujo gráfico é representado pela seguinte figura:



a) $y = \frac{|x+1| - |x-1|}{2}$

b) $y = \frac{|x-1| - |x+1|}{2}$

c) $y = \frac{|x+1| + |x-1|}{2}$

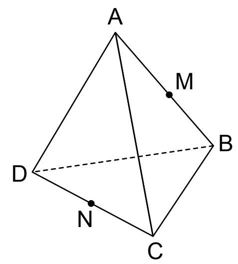
d) $y = \frac{|x+1| + |x-1|}{2x}$

e) $y = \frac{|x-1| - |x+1|}{|2x|}$

11 Sendo A um conjunto com exatamente sete números reais positivos e distintos, quantos são os pares ordenados (x; y) em que $x \in A$, $y \in A$ e $x \le y$?

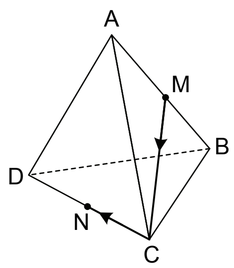
a) 49
b) 42
c) 35
d) 28
e) 21

12 Na figura a seguir, temos um sólido chamado de tetraedro regular cujas faces ABC, BDC, ADC e ABD são triângulos equiláteros. Considere M e N pontos médios das arestas $\overline{AB}$ e $\overline{CD}$, respectivamente.

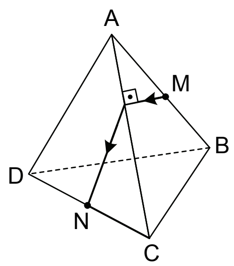


Assinale a alternativa correspondente ao trajeto mais curto que podemos obter quando percorremos a superfície do sólido de M até N.

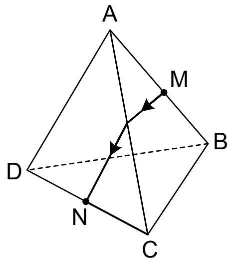
a)



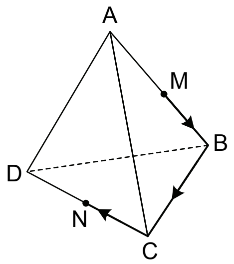
b)



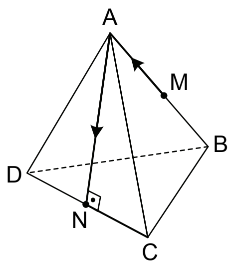
c)



d)



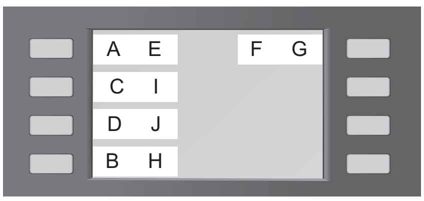
e)



13 Considere a operação # definida no conjunto dos números inteiros tal que a # b designe o valor do resto da divisão do número a pelo número b. Assim, temos, por exemplo, que: 7 # 2 = 1, 10 # 4 = 2 e 28 # 5 = 3.
Se A é o conjunto dos números naturais maiores que 9 e B é o conjunto dos números naturais menores que 10, sobre a função $f : A \to B$, tal que $f(x) = x \# 7$, podemos afirmar que é:

a) crescente.
b) decrescente.
c) periódica.
d) injetora.
e) sobrejetora.

14 Fagundes foi ao caixa eletrônico fazer uma retirada com seu cartão magnético. A senha desse cartão é composta de quatro algarismos e três letras dentre as letras A, B, C, D, E, F, G, H, I e J.
Fagundes lembrava-se dos números de sua senha, mas, quando chegou o momento de digitar as letras, a tela do caixa eletrônico apresentou a seguinte imagem:



Fagundes lembrava-se de que as letras de sua senha foram escolhidas dentre as letras de seu nome e sabia que não havia escolhido letras repetidas.

Considerando que os botões prateados ao lado da tela podem ser usados para digitar qualquer uma das duas letras que aparecem próximas a eles, qual seria o número máximo de tentativas necessárias para que Fagundes consiga efetuar sua retirada?

a) 24
b) 21
c) 18
d) 15
e) 12

15 Sabendo que a variação do comprimento de uma barra metálica é diretamente proporcional à variação da temperatura, qual deve ser o comprimento, em centímetros, de uma barra metálica aquecida a uma temperatura de 76 ^{o}C, se a 25 ^{o}C ela mede 0,65 m e a 55 ^{o}C ela passa a medir 0,7 m?

a) 73,5 cm
b) 77,5 cm
c) 80,5 cm
d) 85,5 cm
e) 89,5 cm

16 Em um famoso jogo de tabuleiro que simula uma guerra, há três dados vermelhos e três dados amarelos, todos em forma de cubo e numerados de 1 a 6. Os dados vermelhos são usados para o ataque, e os dados amarelos, para a defesa.
Depois de jogados os seis dados, comparam-se os maiores resultados dos dados de cada cor, bem como os resultados intermediários e os menores resultados, por exemplo:
Resultados dos dados vermelhos: 4, 5 e 2.
Resultados dos dados amarelos: 2, 2 e 6.

Resultados	Vermelhos	Amarelos	Vitória
Maiores	5	6	Defesa
Intermediários	4	2	Ataque
Menores	2	2	Defesa

Um ataque é bem-sucedido quando os resultados dos dados vermelhos superam os resultados dos dados amarelos nas três comparações.
Assim, se um jogador que efetuou um ataque obteve os números 5, 4 e 3, quantas são as possibilidades distintas para os resultados dos dados amarelos que proporcionariam a este jogador um ataque bem-sucedido?
Observação: O resultado de uma jogada, em que os números obtidos nos dados de uma mesma cor forem, por exemplo: 2, 5 e 4, deve ser considerado o mesmo que, por exemplo: 4, 2 e 5.

a) 25
b) 20
c) 18
d) 16
e) 14

17 Considere o conjunto de todos os números inteiros positivos de três algarismos distintos tais que a soma desses algarismos seja igual a 9. Assinale a alternativa que apresenta o valor da soma de todos os elementos desse conjunto.

a) 5994
b) 2997
c) 1998
d) 1332
e) 999

18 Considere as seguintes expressões algébricas:

I. $\sqrt{k^2+1} = k+1$

II. $\sqrt[k]{6} = \sqrt[k]{2} \cdot \sqrt[k]{3}$

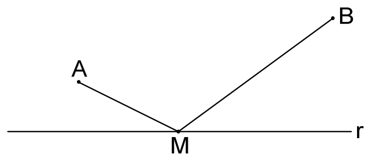
III. $\sqrt[3]{\sqrt{k}} = \sqrt{\sqrt[3]{k}}$

IV. $\sqrt{k^{1/k}} = \sqrt[2k]{k}$

Sendo k um elemento qualquer do conjunto dos números inteiros positivos, quantas dessas expressões são falsas?

a) Nenhuma.
b) Uma.
c) Duas.
d) Três.
e) Todas.

19 Os pontos A e B estão em um mesmo semiplano determinado pela reta r. A e B distam, respectivamente, a e b de r, com b > a. A distância entre os dois pontos vale c.



Assinale a alternativa correspondente ao valor de AM, com $M \in r$, tal que $|MB - MA|$ seja máxima.

a) $\dfrac{ac}{a+b}$

b) $\dfrac{ab}{a+b+c}$

c) $\sqrt{a^2+c^2} + \sqrt{b^2+c^2}$

d) $\dfrac{ac}{b-a}$

e) $\dfrac{ac}{2b-a}$

20 Assinale a alternativa correspondente ao valor mínimo da função $f(x) = \sqrt{a^2+x^2} + \sqrt{(c-x)^2+b^2}$ para a, b e $c \in \mathbb{R}_+^*$.

a) $\sqrt{a^2+b^2+c^2}$

b) $\sqrt{c^2+(a+b)^2}$

c) $\sqrt{a^2+(b-c)^2}$

d) $\dfrac{a+b+c}{3}$

e) $\dfrac{ac}{a+b}$

21 Considere as progressões aritméticas finitas (8, 15, 22, ..., 2010) e (6, 10, 14, 18, ..., 2010) . Qual é o valor da soma de todos os termos que são comuns a essas duas progressões?

a) 69328
b) 70146
c) 71590
d) 72615
e) 73152

22 Chamamos de critérios de congruência de triângulos as condições necessárias e suficientes para podermos construir com régua e compasso apenas um triângulo com as mesmas características. Os critérios de congruência mais conhecidos e com nomenclatura difundida são: LAL, LLL. ALA e LAA_0.
A partir desses critérios, podemos criar outros de diversos elementos do triângulo. Lembrando que para um triângulo ABC qualquer temos:

m_a (mediana relativa ao lado $\overline{BC}$);

h_C (altura relativa ao lado $\overline{AB}$);

α, β e γ (ângulos internos dos vértices A, B e C);

2ρ (perímetro do triângulo);

b_a (bissetriz interna do ângulo α).

Assinale a alternativa correspondente a um critério de congruência não usual.

a) $\alpha\beta\gamma$
b) $2\rho h_a \beta$
c) $ac\alpha$
d) $a\beta m_a$
e) $a\gamma m_c$

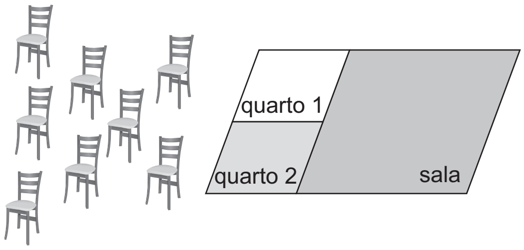
23 Uma urna contém 2010 bolinhas coloridas, sendo 402 azuis, 402 brancas, 402 cinzas, 402 douradas e 402 esverdeadas. Qual é o número mínimo de bolinhas que devem ser retiradas dessa urna, sem que se olhe para sua cor, para termos certeza de que todas as bolas de uma mesma cor tenham sido retiradas?

a) 2006
b) 1500
c) 1005
d) 406
e) 402

24 Considere um número natural a, um número inteiro negativo b, um número decimal periódico c e um número irracional d. Sobre esses números e os conjuntos numéricos N, Z, Q e R, dos números naturais, inteiros, racionais e reais, respectivamente, é correto afirmar que:

a) $a^3 + b^2 \in N$
b) $b \cdot c \notin Z$
c) $c + d \notin Q$
d) $a \cdot d \notin Q$
e) $\dfrac{d}{b} \in Q$

25 De quantas maneiras diferentes podemos distribuir oito cadeiras novas e idênticas nos três únicos ambientes disponíveis de um apartamento, de forma que nenhum desses ambientes fique desprovido de uma cadeira nova?



a) 10
b) 14
c) 18
d) 21
e) 32

Rascunho

Rascunho

Rascunho