Equações do segundo grau

Prof. Tião

Chamamos de equação do segundo grau toda sentença matemática expressa por relação de igualdade que pode ser escrita $ax^2 + bx + c = 0$, com $a \neq 0$. Nessa sentença, temos os seguintes parâmetros reais:

a (coeficiente principal)
b (coeficiente secundário)
c (termo independente)

Uma equação do segundo grau pode apresentar até duas soluções distintas, que podem ser obtidas, em todos os casos, pela fórmula de Bhaskara.

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

Como essa fórmula apresenta uma radiciação, as soluções das equações do segundo grau também são chamadas de raízes da equação, e costumam ser representadas separadamente por x_1 e x_2:

$$x_1 = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \quad \text{e} \quad x_2 = \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

A expressão dentro do radical da fórmula de Bhaskara é chamada de discriminante e é representada pela letra grega delta maiúscula (Δ). Ela determina o número de soluções da equação no universo real:

- Se o discriminante for positivo ($\Delta > 0$), então a equação admite duas soluções reais distintas.
- Se o discriminante for nulo ($\Delta = 0$), então a equação admite apenas uma solução real.
- Se o discriminante for negativo ($\Delta < 0$), então a equação **não** admite solução real.

No primeiro caso ($\Delta > 0$), também costuma ser dito que a equação possui duas raízes reais distintas.

Já no segundo caso ($\Delta = 0$), também se pode dizer que a equação admite duas raízes reais e iguais, pois uma vez que $\sqrt{0} = 0$, os valores de x_1 e x_2 serão ambos iguais a $\frac{-b}{2a}$.

E, no terceiro caso ($\Delta < 0$), dizemos que a equação não possui raízes reais. Isso se deve ao fato de que as raízes quadradas dos números negativos não são números reais. Deve-se ter bastante cuidado para não confundir o termo *raiz de uma equação* com o termo *raiz quadrada*.

Para ganhar tempo na resolução de uma equação do segundo grau, recomenda-se que o valor do discriminante seja obtido antes da montagem completa da fórmula de Bhaskara.

Assim, dada uma equação do segundo grau completa $ax^2 + bx + c = 0$, com $a \neq 0$, $b \neq 0$ e $c \neq 0$, podemos resolvê-la em duas etapas distintas:

O primeiro passo é obter o valor do discriminante:

$$\Delta = b^2 - 4ac$$

Se o valor do discriminante for maior ou igual a zero, então executamos o segundo passo, que consiste em efetuar os cálculos aritméticos da expressão simplificada: $x = \dfrac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a}$.

Mas se o valor do discriminante for negativo, então não há como efetuar esses cálculos no universo real e, assim, evitamos o segundo passo, pois o conjunto-solução da equação é vazio. Exemplos:

①

$$2x^2 - 5x - 3 = 0 \Rightarrow \begin{cases} a = 2 \\ b = -5 \\ c = -3 \end{cases}$$

1º passo ($\Delta = b^2 - 4ac$):

$$\Delta = (-5)^2 - 4 \cdot 2 \cdot (-3) = 25 + 24 = 49$$

2º passo ($x = \dfrac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a}$):

$$x = \frac{-(-5) \pm \sqrt{49}}{2 \cdot 2} = \frac{5 \pm 7}{4} \quad \begin{matrix} \nearrow & x_1 = \dfrac{12}{4} = 3 \\ \searrow & x_2 = \dfrac{-2}{4} = -\dfrac{1}{2} \end{matrix}$$

$$S = \left\{3, -\frac{1}{2}\right\}$$

②

$$9x^2 - 6x + 1 = 0 \Rightarrow \begin{cases} a = 9 \\ b = -6 \\ c = 1 \end{cases}$$

1º passo ($\Delta = b^2 - 4ac$):

$$\Delta = (-6)^2 - 4 \cdot 9 \cdot 1 = 36 - 36 = 0$$

2º passo ($x = \dfrac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a}$):

$$x = \frac{-(-6) \pm \sqrt{0}}{2 \cdot 9} = \frac{6 \pm 0}{18} = \frac{6}{18} = \frac{1}{3}$$

$$S = \left\{\frac{1}{3}\right\}$$

③

$$x^2 + 4x + 2 = 0 \Rightarrow \begin{cases} a = 1 \\ b = 4 \\ c = 2 \end{cases}$$

1º passo ($\Delta = b^2 - 4ac$):

$$\Delta = 4^2 - 4 \cdot 1 \cdot 2 = 16 - 8 = 8$$

2º passo ($x = \dfrac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a}$):

$$x = \frac{-4 \pm \sqrt{8}}{2 \cdot 1} = \frac{-4 \pm 2\sqrt{2}}{2} = -2 \pm \sqrt{2}$$

Observe que o denominador 2, da última fração, divide tanto o termo -4 quanto o termo $\pm 2\sqrt{2}$.

$$S = \{-2 + \sqrt{2},\ -2 - \sqrt{2}\}$$

④

$$x^2 + x + 2 = 0 \Rightarrow \begin{cases} a = 1 \\ b = 1 \\ c = 2 \end{cases}$$

1º passo ($\Delta = b^2 - 4ac$):

$$\Delta = 1^2 - 4 \cdot 1 \cdot 2 = 1 - 8 = -7$$

Como o valor do discriminante é negativo, não há como executar o segundo passo no universo real.

Portanto, temos que:

$$S = \varnothing$$

Exercício

9 Resolva as seguintes equações do segundo grau:

a) $x^2 - 5x + 6 = 0$
b) $x^2 + 5x + 6 = 0$
c) $x^2 - 5x - 6 = 0$
d) $x^2 + 5x - 6 = 0$
e) $x^2 - 6x + 5 = 0$
f) $x^2 + 6x + 5 = 0$
g) $5x^2 - 6x + 1 = 0$
h) $6x^2 - 5x + 1 = 0$
i) $2x^2 - 7x + 5 = 0$
j) $x^2 - x - 1 = 0$
k) $x^2 - 4x + 1 = 0$
l) $x^2 - 10x + 15 = 0$
m) $x^2 - 4x + 4 = 0$
n) $4x^2 + 12x + 9 = 0$
o) $x^2 + 4x + 5 = 0$
p) $2x^2 - 3x + 8 = 0$

As equações do segundo grau do tipo $ax^2 + bx = 0$ e do tipo $ax^2 + c = 0$, com $a \neq 0$, são chamadas de equações incompletas e, embora possam ser resolvidas pela fórmula de Bhaskara, considerando $c = 0$ no primeiro tipo e $b = 0$ no segundo, há maneiras mais eficientes de se obter suas soluções.

Toda equação na variável x que não apresenta termo independente admite $x = 0$ como solução, pois se todos os termos dependem da variável, então quando essa variável é nula, todos os termos também serão. Esse raciocínio pode ser aplicado em equações de qualquer grau.

Veja como $x = 0$ torna verdadeira cada uma das sentenças a seguir.

$$6x^2 - 5x = 0$$
$$x^3 + 7x^2 - 2x = 0$$
$$x^5 + 2x^4 + 8x^3 - x^2 + 9x = 0$$

Assim, temos que $x = 0$ é uma das soluções de qualquer equação do segundo grau incompleta da forma $ax^2 + bx = 0$, com $a \neq 0$. Então, fatorando-se o primeiro membro da equação, pode-se chegar rapidamente à conclusão de que a outra solução é dada por $x = \frac{-b}{a}$.

$$ax^2 + bx = 0 \iff S = \left\{0, -\frac{b}{a}\right\}$$

Exemplos:

$$5x^2 + 2x = 0 \iff S = \left\{0, -\frac{2}{5}\right\}$$
$$x^2 + 5x = 0 \iff S = \{0, -5\}$$
$$3x^2 - 12x = 0 \iff S = \{0, 4\}$$
$$x^2 - 9x = 0 \iff S = \{0, 9\}$$

Exercício

10 Escreva o conjunto-solução de cada uma das equações do segundo grau a seguir.

a) $2x^2 + 6x = 0$
b) $3x^2 - 5x = 0$
c) $x^2 - 7x = 0$
d) $x^2 + 2x = 0$
e) $x^2 - x = 0$
f) $x^2 + x = 0$

As equações do segundo grau incompletas da forma $ax^2 + c = 0$, com $a \neq 0$, só admitem solução se os coeficientes **a** e **c** tiverem sinais opostos, ou seja, quando um deles for positivo e o outro negativo. Nesse caso, temos duas soluções opostas $x_1 = -x_2$. Veja o exemplo:

$$4x^2 - 36 = 0 \iff 4x^2 = 36 \iff x^2 = 9$$

Nesse ponto, devemos nos lembrar de que existem dois números reais que elevados à segunda potência resultam no número 9. São eles os números 3 e −3. Portanto, $x^2 = 9 \iff S = \{-3, 3\}$.

Agora, no caso de os coeficientes **a** e **c** terem o mesmo sinal, o conjunto-solução da equação será vazio. Isso acontece porque para uma soma ser igual a zero, uma parcela deve ser positiva e a outra negativa. Então, como x^2 não é negativo, qualquer que seja o número real x, temos que uma equação como $4x^2 + 36 = 0$, que não admite solução real, ou seja, $4x^2 + 36 = 0 \iff S = \varnothing$ no universo dos reais.

Exercício

11 Escreva o conjunto-solução de cada uma das equações do segundo grau a seguir.

a) $3x^2 - 12 = 0$
b) $2x^2 + 6 = 0$
c) $x^2 - 49 = 0$
d) $x^2 + 9 = 0$
e) $x^2 - 1 = 0$
f) $x^2 - 2 = 0$