Números complexos

Algumas equações do segundo grau como $x^2 + 1 = 0$ não possuem solução no universo real e o estudo destas soluções não parecia necessário até o século XVI quando o matemático Raphael Bombelli publicou uma obra que discute a resolução de equações de terceiro grau. Nesta obra encontramos a resolução da equação $\mathbf{x^3 = 15x+4}$ por um processo similar ao apresentado a seguir:

Primeiro a equação é comparada à identidade $(a+b)^3 \equiv 3ab(a+b) + A + B$, com $A = a^3$ e $B = b^3$.

Fazendo $\mathbf{x} = a + b$, nesta identidade obtemos o sistema: $\begin{cases} 3ab = 15 \\ A + B = 4 \end{cases}$.

De $3ab = 15$ temos $ab = 5$, relação que elevada ao cubo fica: $a^3b^3 = 125$, ou seja: $AB = 125$.

Agora basta resolver o sistema $\begin{cases} A + B = 4 \\ A \cdot B = 125 \end{cases}$ para obtermos $\mathbf{x} = \sqrt[3]{A} + \sqrt[3]{B}$.

A resolução deste sistema passa pela equação quadrática $z^2 - 4z + 125 = 0$, em que a incógnita z representa tanto A quanto B, mas esta equação apresenta discriminante é negativo: $\Delta = -484$.

Até esta publicação, nenhum matemático havia se deparado com a necessidade de interpretar a raiz quadrada de um número negativo. E, se não fosse o fato de que a equação $\mathbf{x^3 = 15x+4}$ tem solução real $\mathbf{x = 4}$, provavelmente não teríamos criado o conjunto dos números complexos.

O conjunto dos números complexos

Em 1729, uma publicação do matemático Leonard Euler sugere o símbolo **i** para representar $\sqrt{-1}$ e, sendo assim, uma expressão como $\sqrt{-9} = \sqrt{9 \cdot (-1)} = 3\sqrt{-1}$ fica representada por **3i**.

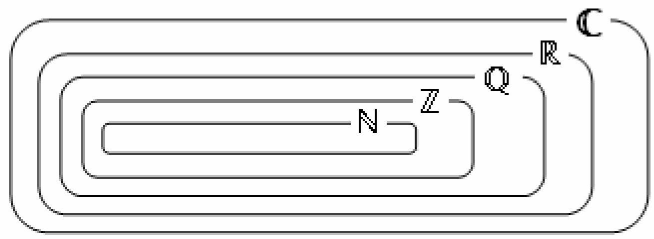
Chamamos o número **i** de **unidade imaginária**, e seus múltiplos não nulos como **3i** e **22i** formam um conjunto numérico denominado de conjunto dos números imaginários puros. O conjunto dos números complexos é formado por todas as possíveis adições entre números reais e imaginários puros:

$$\mathbb{C} = \{ z = a + b \cdot i \mid a \in \mathbb{R},\ b \in \mathbb{R},\ i^2 = -1 \}$$

- Parte real do número z: $\mathbf{Re(z) = a}$
- Parte imaginária do número z: $\mathbf{Im(z) = b}$
- Afixo do número z: $\mathbf{(a; b)}$
- Conjugado do número z: $\mathbf{\bar{z} = a - b \cdot i}$

$$\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R} \subset \mathbb{C}$$

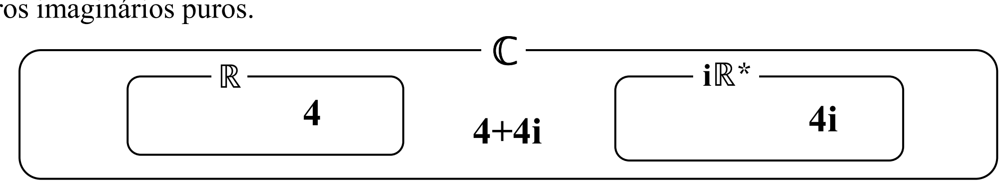
Naturais Inteiros Racionais Reais Complexos



Todas as propriedades aritméticas válidas em ℕ, também são válidas em ℤ. Além disso, o conjunto ℤ apresenta propriedades inconcebíveis em ℕ como, por exemplo, a regra de sinal: (– · – = +).

Esta relação entre conjuntos numéricos é chamada de HERANÇA. Se dois conjuntos numéricos A e B são tais que A⊂B, então B herda todas as propriedades aritméticas válidas em A e apresenta novas propriedades a respeito de seus novos elementos, desde que estas novas propriedades não contrariem as propriedades herdadas. Desta forma conjunto dos números complexos herda todas as propriedades válidas no conjunto dos números reais e apresenta, dentre outras propriedades, número cujos quadrados são negativos.

Há dois importantes subconjuntos de ℂ que devem ser levados em consideração: o conjunto dos números reais e o conjunto dos números imaginários puros.



$\mathbf{a + bi}$ é número real $\Leftrightarrow \mathbf{b = 0}$ $\mathbf{a + bi}$ é imaginário puro $\Leftrightarrow \mathbf{a = 0}$ e $\mathbf{b \neq 0}$

Desta forma temos, por exemplo, que o número 4 é um complexo real, pois pode ser escrito na forma $\mathbf{a + bi}$, com $a = 4$ e $b = 0$, ou seja: $4 = 4 + 0i$, ao passo que o número $4i$ é imaginário puro, pois com $a = 0$ e $b = 4$, temos que: $a + bi = 0 + 4i = 4i$. Já o número $4 + 4i$ é complexo, mas não é real nem imaginário puro.

Igualdade em $\mathbb{C}$

Dados dois números complexos em suas formas algébricas $\mathbf{z = a + bi}$ e $\mathbf{w = c + di}$ temos que estes dois números são iguais se, e somente se, tiverem a mesma parte real e a mesma parte imaginária.

$$z = w \Leftrightarrow a + bi = c + di \Leftrightarrow \begin{cases} a = c \\ b = d \end{cases}$$

Adição em $\mathbb{C}$

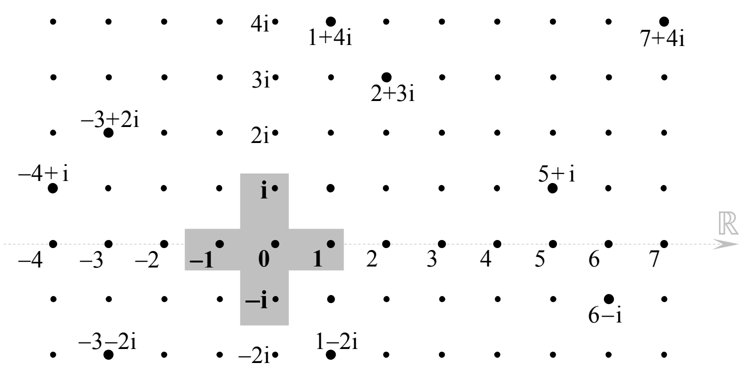
$$z + w = (a + bi) + (c + di) = a + c + bi + di = (a + c) + (b + d)i$$

Multiplicação em $\mathbb{C}$

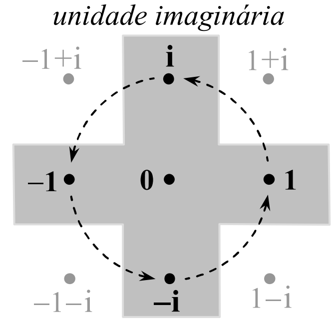
$$z \cdot w = (a + bi) \cdot (c + di) = ac + adi + cbi + cdi^2 = (ac - bd) + (cb + ad)i$$

Números Inteiros de Gauss

No início do século XIX o astrônomo e matemático Carl Friedrich Gauss publicou alguns artigos que tratam dos números complexos da forma $\mathbf{a + bi}$ com **a** e **b** inteiros. Conhecidos hoje como inteiros de Gauss, estes números podem ser representados geometricamente por uma malha quadriculada de pontos coplanares como mostram as figuras a seguir:



Ciclo das potências inteiras da unidade imaginária



Uma vez escolhido um ponto desta malha para representar o número zero, temos que os quatro pontos mais próximos do ponto zero representam os números **1** (à direita), **–1** (à esquerda), **i** (acima) e **–i** (abaixo).

Potências inteiras da unidade imaginária

As potências inteiras da unidade imaginária formam um ciclo com período de quatro termos, sendo eles os números **1**, **i**, **–1** e **–i**. Como o conjunto dos complexos herda do conjunto dos reais a propriedade que diz ser unitária toda potência de expoente nulo, temos que $\mathbf{i}^0 = 1$ e, portanto:

$$\ldots,\ \mathbf{i^0 = 1},\ \mathbf{i^1 = i},\ \mathbf{i^2 = -1},\ \mathbf{i^3 = -i},\ \mathbf{i^4 = 1},\ i^5 = i,\ i^6 = -1,\ i^7 = -i,\ i^8 = 1,\ i^9 = i,\ i^{10} = -1,\ \ldots$$

Assim, para inteiro **n**, temos: $\mathbf{i^n = i^r}$, em que $\mathbf{r \in \{0, 1, 2, 3\}}$ é o resto da divisão de **n** pelo número **4**.

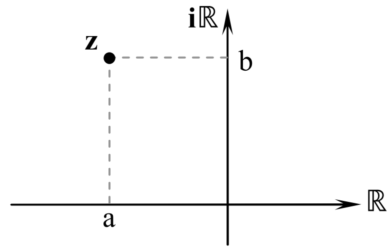
O plano de Wessel-Argand-Gauss

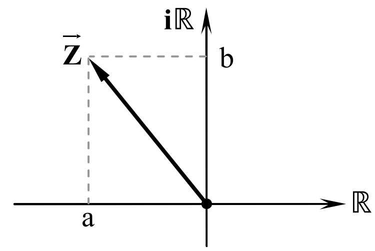
No século XVI, matemáticos como Rafael Bombelli, enfrentaram a necessidade da interpretação de raízes quadradas de números negativos. Dois séculos depois, estes estudos foram ampliados por Wessel, Argand e Gauss que hoje são considerados os criadores da teoria dos números complexos.

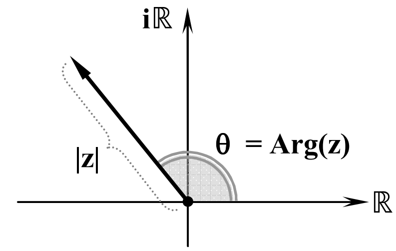
Parte da evolução desta teoria deve-se à representação cartesiana dos números complexos proposta, em 1797, pelo topógrafo norueguês Gaspar Wessel, e posteriormente por Robert Argand em 1806, mas foi um trabalho publicado por Gauss, em 1812, que realmente difundiu a idéia do plano complexo.

Trata-se de uma adaptação do plano cartesiano tradicional, na qual o eixo das abscissas continua representando o conjunto dos números reais enquanto o eixo das ordenadas, com exceção da origem, passa a representar o conjunto dos imaginários puros. Assim, um número complexo $\mathbf{z = a + bi}$ passa a ser representado, no plano complexo, por seu afixo: o par ordenado $\mathbf{(a; b)}$.

A primeira, das figuras a seguir, apresenta um número complexo no segundo quadrante, ou seja, com parte real negativa (a<0) e parte imaginária positiva (b>0); a segunda figura apresenta o vetor $\vec{\mathbf{Z}}$ associado, e a terceira figura destaca o módulo e o argumento desse vetor.







O módulo de um número complexo não nulo $\mathbf{z = a + bi}$ é o número real positivo que representa o tamanho do vetor $\vec{\mathbf{Z}}$, e pode ser obtido como a medida da diagonal do retângulo de lados $|\mathbf{a}|$ e $|\mathbf{b}|$ na segunda figura, aplicando-se o teorema de Pitágoras: $|\mathbf{z}|^2 = |\mathbf{a}|^2 + |\mathbf{b}|^2 \Leftrightarrow |\mathbf{z}| = \sqrt{|\mathbf{a}|^2 + |\mathbf{b}|^2}$.

Uma vez que **a = Re(z)** e **b = Im(z)** são números reais, temos que seus quadrados são positivos, sendo então desnecessário indicá-los em módulo dentro do radical. Desta forma temos que:

$$|\mathbf{z}| = \sqrt{\mathbf{Re(z)^2 + Im(z)^2}}$$

O argumento de um número complexo é a medida, em graus ou radianos, de um arco trigonométrico determinado pelo vetor associado ao número complexo e o semi-eixo dos números reais positivos. Como o modelo trigonométrico admite a existência de diversos arcos côngruos chamamos de argumento principal ao arco de menor valor positivo. Assim, temos que os arcos de –240º, 120º e 480º podem, por exemplo, ser argumentos de um mesmo número complexo e, neste caso, seu argumento principal será igual a 120º. As relações entre o módulo de um número complexo, suas partes real e imaginária, e seu argumento principal θ são expressas por:

$$\theta = \mathbf{Arg}(\mathbf{z}) \Rightarrow \begin{cases} \mathbf{sen}\theta = \dfrac{\mathbf{Im(z)}}{|\mathbf{z}|} \Leftrightarrow \mathbf{Im(z)} = |\mathbf{z}| \cdot \mathbf{sen}\theta \\ \mathbf{cos}\theta = \dfrac{\mathbf{Re(z)}}{|\mathbf{z}|} \Leftrightarrow \mathbf{Re(z)} = |\mathbf{z}| \cdot \mathbf{cos}\theta \\ \mathbf{tg}\theta = \dfrac{\mathbf{Im(z)}}{\mathbf{Re(z)}} \end{cases}$$

O par ordenado $(|\mathbf{z}|, \theta)$, formado pelo módulo de um complexo **z** e um de seus argumentos, apresenta o que chamamos de coordenadas polares do complexo **z**.

As coordenadas polares de um número complexo são usadas para representá-lo em sua forma trigonométrica:

$$z = |z| \cdot (\cos\theta + i \cdot \text{sen}\theta)$$

Fórmulas de Moivre

Considere dois números complexos **Z** e **W** cujas partes reais são respectivamente **a** e **c**, as partes imaginarias são respectivamente **b** e **d** e cujos argumentos são respectivamente **α** e **β**. Assim podemos representar esses números de diversas formas: $Z = a + b \cdot i = (a\,;b) = |Z| \cdot (\cos\alpha + i \cdot \text{sen}\alpha) = |Z| \cdot \text{cis}(\alpha) = (|Z|;\alpha)$

$$W = c + d \cdot i = (c\,;d) = |W| \cdot (\cos\beta + i \cdot \text{sen}\beta) = |W| \cdot \text{cis}(\beta) = (|W|;\beta)$$

Forma algébrica	*Coordenadas cartesianas (Afixo)*	*Forma trigonométrica*	*Forma trigonométrica abreviada*	*Coordenadas polares*

Para efetuar a adição e a subtração entre estes dois números complexos recomenda-se o uso da forma algébrica. Multiplicações e divisões podem ser efetuadas com eficiência tanto na forma algébrica quanto nas formas trigonométricas ou na forma polar. Já a potenciação e a radiciação são efetuadas com mais eficiência pelas formas trigonométricas ou pela forma polar.

- Para obter o produto entre dois números complexos **Z** e **W**, na formas trigonométricas ou na forma polar, basta multiplicarmos os módulos e somarmos seus argumentos:

$$Z \cdot W = |Z| \cdot |W| \cdot \left[\cos(\alpha+\beta) + \mathbf{i} \cdot \operatorname{sen}(\alpha+\beta)\right] \qquad (|Z|;\,\alpha) \cdot (|W|;\,\beta) = (|Z| \cdot |W|;\,\alpha+\beta)$$

- Para obter o quociente entre os números complexos **Z** e **W ≠ 0**, na formas trigonométricas ou na forma polar, basta dividirmos seus módulos e subtrairmos seus argumentos:

$$\frac{Z}{W} = \frac{|Z|}{|W|} \cdot \left[\cos(\alpha-\beta) + \mathbf{i} \cdot \operatorname{sen}(\alpha-\beta)\right] \qquad \frac{(|Z|;\,\alpha)}{(|W|;\,\beta)} = \left(\frac{|Z|}{|W|};\,\alpha-\beta\right)$$

- Para obter a **n**-ésima potência de um número complexos **Z**, na formas trigonométricas ou na forma polar, basta elevarmos seu módulo à **n**-ésima potência e multiplicarmos por **n** o seu argumento:

$$Z^n = |Z|^n \cdot \left[\cos(n \cdot \alpha) + \mathbf{i} \cdot \operatorname{sen}(n \cdot \alpha)\right] \qquad (|Z|;\,\alpha)^n = (|Z|^n;\,n \cdot \alpha)$$

Agora, para resolver equações envolvendo números complexos expressos nas formas trigonométricas ou na forma polar, devemos atentar ao fato de que um mesmo número complexo pode ser apresentado por diversos argumentos diferentes. Por exemplo, se **Z** é um número imaginário puro como **–3i**, então seu módulo é igual a 3 mas seu argumento pode ser expresso tanto por –90º como por 270º ou 630º. Assim, na forma polar, temos que:

(3, –90º) = (3, 270º) = (3, 630º)

Quando escritos numa da formas trigonométricas ou na forma polar, os números complexos obedecem às seguintes propriedades:

- **Z** é real $\Leftrightarrow \alpha = k \cdot \pi$, com $k \in \mathbb{Z}$
- **Z** é imaginário puro $\Leftrightarrow \alpha = \frac{\pi}{2} + k \cdot \pi$, com $k \in \mathbb{Z}$
- $\mathbf{Z} = \mathbf{W} \Leftrightarrow \begin{cases} |Z| = |W| \\ \alpha = \beta + k \cdot 2\pi, \text{ com } k \in \mathbb{Z} \end{cases}$

Exercícios:

1. Resolver em $\mathbb{C}$ a equação $x^2 - 2x + 5 = 0$.

2. Sendo $z = 4 - 3i$ e $w = 2 + i$ determine:

a) $z + w$

b) $z - w$

c) $z \cdot w$

d) z^2

e) $w \cdot \overline{w}$

f) $\frac{z}{w}$

3 Fuvest. Sabendo que α é um número real e que a parte imaginária do número complexo $\frac{2+i}{\alpha+2i}$ é zero, então α é:

A) –4
B) –2
C) 1
D) 2
E) 4

4. Sendo **Z** o número complexo que satisfaz à equação $2\mathbf{Z} + 4\overline{\mathbf{Z}} = 12 + 4\mathbf{i}$ em que **i** é a unidade imaginária e $\overline{\mathbf{Z}}$ indica o conjugado do número **Z**, então o produto $\mathbf{Z} \cdot \overline{\mathbf{Z}}$ é igual a:

A) 2
B) 4
C) 8
D) 16
E) 32

5. Sendo **i** a unidade imaginária, calcule o valor da expressão $E = i^{2011} + i^{2012} + i^{2013}$.

6. Considere a função $p(x) = x^4 - 81$ e faça o que se pede em cada um dos itens a seguir:

a) Decomponha $p(x)$ em fatores de primeiro grau.

b) Resolva à equação $p(x) = 0$ no universo dos números complexos.

c) Represente, no plano complexo, cada uma das soluções encontradas, escreva suas coordenadas polares e suas respectivas formas trigonométricas.

d) Calcule a área do polígono cujos vértices são os afixos das soluções da equação $p(x) = 0$.

7 Unifesp. Quatro números complexos representam, no plano complexo, vértices de um paralelogramo. Três dos números são $z_1 = -3 - 3i$, $z_2 = 1$ e $z_3 = -1 + \frac{5}{2}i$. O quarto número tem as partes real e imaginária positivas. Esse número é:

A) $2 + 3i$
B) $3 + \frac{11}{2}i$
C) $3 + 5i$
D) $2 + \frac{11}{2}i$
E) $4 + 5i$

8. No plano complexo, os vértices A e B de um quadrado ABCD são respectivamente representados pelos afixos dos números complexos $z = 0$ e $w = 4 + 3i$.

Sabendo que o vértice D pertence ao segundo quadrante pode-se concluir que o vértice C é representado pelo afixo do número

A) 7 + i
B) 1 + 7i
C) 2 + 6i
D) 6 + 2i
E) 3 + 3i

9 Unifesp. Os números complexos z_1, $z_2 = 2i$ e $z_3 = a\sqrt{3} + ai$, onde **a** é um número real positivo, representam no plano complexo vértices de um triângulo eqüilátero. Dado que $|z_1 - z_2| = 2$, o valor de **a** é

A) 2
B) 1
C) $\sqrt{3}$
D) $\frac{\sqrt{3}}{2}$
E) $\frac{1}{2}$

10 FGV. Um ponto do plano cartesiano pode ser descrito pelas suas coordenadas retangulares (x, y) ou pelas suas coordenadas polares (r, θ), sendo r a distância entre o ponto e a origem do sistema e θ a medida, em radianos, do arco que o eixo x descreve no sentido anti-horário, até encontrar OP. Em geral, $0 \le \theta < 2\pi$. As relações utilizadas para que se passe de um sistema de coordenadas a outro são as seguintes:

$$r = \sqrt{x^2 + y^2}\ ;\ \text{sen}\theta = \frac{y}{r};\ \cos\theta = \frac{x}{r};\ \text{tg}\theta = \frac{y}{x}$$

As coordenadas polares do ponto P(1,1) são:

A) $\left(\sqrt{2}, \pi\right)$
B) $\left(\sqrt{2}, \frac{\pi}{2}\right)$
C) $\left(\sqrt{2}, \frac{\pi}{4}\right)$
D) $\left(\sqrt{2}, \frac{3\pi}{4}\right)$
E) $\left(\sqrt{2}, \frac{3\pi}{2}\right)$

11. Sendo Z = 1 + i e W = −2 + 2i, calcule:

a) $\overline{Z+W} =$

b) $Z-\overline{W} =$

12. Escreva os números Z e W do exercício anterior na forma trigonométrica.

13. Utilizando as formas trigonométricas dos números complexos Z e W obtidas no exercício anterior, determine os valores de:

a) $Z \cdot W =$

b) $\dfrac{Z}{W} =$

c) $Z^5 + W^3 =$

14 Unesp. Considere o número complexo $z = \cos\dfrac{\pi}{6} + i\,\text{sen}\,\dfrac{\pi}{6}$. O valor de $z^3 + z^6 + z^{12}$ é:

A) $-i$

B) $\dfrac{1}{2} + \dfrac{\sqrt{3}}{2}\cdot i$

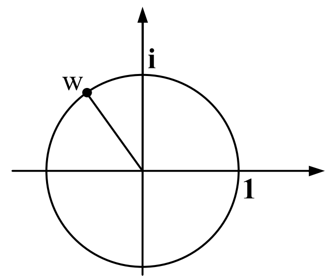
C) $i - 2$

D) i

E) $2i$

15. Determine o menor inteiro positivo n para o qual $\left(\dfrac{1}{2} + \dfrac{\sqrt{3}}{2}\cdot \mathbf{i}\right)^n$ seja real.

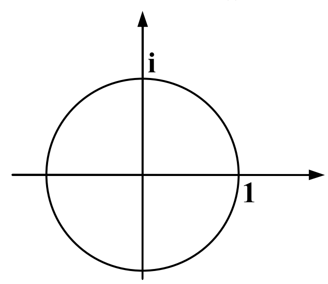
16 Fuvest. A figura representa o número $w = \dfrac{-1+i\sqrt{3}}{2}$ no plano complexo, sendo $i = \sqrt{-1}$ a unidade imaginária.



Nestas condições, determine:

a) as partes real e imaginária dos números $\dfrac{1}{w}$ e w^3.

b) a representação dos números $\dfrac{1}{w}$ e w^3 na figura.



c) as raízes complexas da equação $z^3 - 1 = 0$.

17 Unesp. As soluções da equação $z^3 = i$, onde z é um número complexo e $i^2 = -1$, são:

A) $z = \pm\dfrac{\sqrt{2}}{2} + \dfrac{1}{2}i$ ou $z = -i$.

B) $z = \pm\dfrac{\sqrt{3}}{2} - \dfrac{1}{2}i$ ou $z = -i$.

C) $z = \pm\dfrac{\sqrt{3}}{2} + \dfrac{1}{2}i$ ou $z = -i$.

D) $z = \pm\dfrac{\sqrt{2}}{2} - \dfrac{1}{2}i$ ou $z = -i$.

E) $z = \pm\dfrac{1}{2} - \dfrac{\sqrt{3}}{2}i$ ou $z = -i$.