

## Questões de funções e geometria analítica (2D)

### 1 FAUUSP 2005

O objetivo desta questão é usar as propriedades das rotações no plano para resolver problemas geométricos.

a) Determinar as coordenadas dos cinco vértices de um pentágono não regular ABCDE, conhecendo-se os pontos médios de seus lados:  $M_1 = (0, 6)$ ;  $M_2 = (-2, 2)$ ;  $M_3 = (0, -2)$ ;  $M_4 = (4, -1)$  e  $M_5 = (3, 4)$ .

Para fazê-lo, parta do ponto  $P_0 = (2, 6)$ . Rotacione  $P_0$  de  $180^\circ$  por  $M_1$ ; com o ponto resultante, repita a operação por  $M_2$ , em seguida por  $M_3$ ,  $M_4$  e  $M_5$ , chegando ao ponto  $P_1$ .

O vértice A do pentágono é o ponto médio do segmento  $P_0P_1$ . A partir desse resultado, determine as coordenadas dos demais vértices do pentágono. Em seus desenhos, mantenha todas as linhas de construção.

b) Determinar as coordenadas dos vértices do triângulo ABC, sabendo-se que B é obtido de A por uma rotação de  $90^\circ$  no sentido horário em torno do ponto  $P = (1, -2)$ ; C é obtido de B por uma rotação de  $90^\circ$  no sentido horário em torno do ponto  $Q = (2, 4)$ , e A é obtido de C por uma rotação de  $90^\circ$  no sentido horário em torno do ponto  $R = (-3, 2)$ .

Em primeiro lugar, faça essa mesma sequência de rotações com os pontos  $X_0 = (-2, 1)$  e  $Y_0 = (-1, 0)$ , obtendo como resultados os pontos  $X_1$  e  $Y_1$ , respectivamente. O vértice A do triângulo é o ponto de encontro das mediatrizes dos segmentos  $X_0X_1$  e  $Y_0Y_1$ . A partir desse resultado, determine as coordenadas dos demais vértices do triângulo. Em seus desenhos, mantenha todas as linhas de construção.

### 2 FAUUSP 2006

Determine o conjunto de todos os números reais  $x$  que são soluções do seguinte sistema de inequações:

$$\begin{cases} 2x - 3 \leq 3x + 2 \\ 4x + 2 \leq x + 5 \end{cases}$$

a) Desenhe, num mesmo plano cartesiano, as retas dadas pelas equações a seguir:

$$y = 2x - 3$$

$$y = 3x + 2$$

$$y = 4x + 5$$

$$y = x + 5$$

b) Indique no desenho do item anterior o conjunto solução do sistema.

### 3 FAUUSP 2007

Você pode obter diversos pontos de uma curva chamada hipérbole usando apenas régua e esquadros. Para isto, siga o roteiro:

a) Trace os eixos coordenados  $x$  e  $y$  e as retas  $(r): y = 2x$  e  $(s): y = -2x$  (estas retas serão as assíntotas da hipérbole).

b) Dados o ponto  $A = (1, 0)$  (que pertencerá à hipérbole) e a reta  $y = x$ , obtenha o ponto B, que é vértice oposto de A no paralelogramo ACBD, de lados paralelos às retas  $r$  e  $s$  e de diagonal contida na reta  $y = x$ .

c) Determine as coordenadas do ponto B obtido no item b).

d) Repita o procedimento do item b, com paralelogramos ACBD cujas diagonais CD estejam contidas nas retas  $y = mx$ , com  $m = \frac{1}{3}$ ,  $\frac{1}{2}$  e  $\frac{3}{4}$ . (Os diversos pontos B assim obtidos pertencerão à hipérbole)

e) Para obter mais pontos da hipérbole, reflita os pontos obtidos, em relação ao eixo  $x$ . Ligue (à mão livre) todos esses pontos da hipérbole obtendo um de seus ramos. Um segundo ramo pode ser obtido refletindo-se o primeiro em relação ao eixo  $y$ .

**4 FAUUSP 2008**

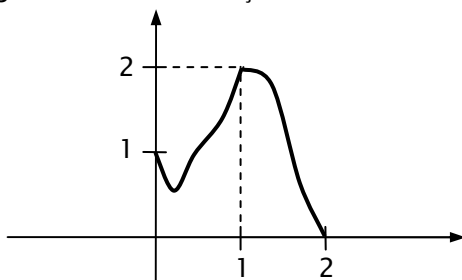
As construções solicitadas a seguir devem ser feitas com os instrumentos de desenho (régua, compasso e esquadro) e necessariamente acompanhadas de uma descrição e justificativa.

a) Construa um par de eixos coordenados perpendiculares e nesse sistema ortogonal de coordenadas, desenhe os gráficos das funções  $f(x) = \sqrt{4-x^2}$  e  $g(x) = |x+1|-1$ .

b) Utilize os gráficos construídos no item anterior para resolver a desigualdade  $\sqrt{4-x^2} < |x+1|-1$ . Justifique sua resposta.

**5 FAUUSP 2010**

A figura a seguir ilustra a parte do gráfico de uma função  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  restrita ao intervalo  $[0, 2]$ .



Na folha de respostas, esboce as partes dos gráficos das funções dadas a seguir, restritas aos intervalos correspondentes. Para referência, a parte do gráfico da função  $f$  também está desenhada na folha de respostas.

$g_1(x) = -f(x)$

$g_2(x) = f(-x)$

$g_3(x) = f(x+1)$

$g_4(x) = 1-f(-x)$

Folha de respostas

<p><b>g<sub>1</sub></b></p>	<p><b>g<sub>2</sub></b></p>
<p><b>g<sub>3</sub></b></p>	<p><b>g<sub>4</sub></b></p>

**Questões de geometria analítica (3D)**

**1 FAUUSP 2004**

Um tetraedro ABCD tem seus vértices nas seguintes coordenadas:

$$A = (0,0,0) \quad B = (2,1,0) \quad C = (1,1,1) \quad D = (0,2,0)$$

- Desenhe a mão livre, em perspectiva, os eixos coordenados e o tetraedro.
- Calcule a área da face ACD.
- Calcule o volume do tetraedro.
- Calcule a distância do ponto  $E = (0,0,3)$  ao plano da face ACD.

**2 FAUUSP 2005**

Considere o retângulo ABCD no espaço, com as seguintes coordenadas:

$$A = (0,3,0) \quad B = (3,0,3) \quad D = (3,9,3)$$

- Desenhe a mão livre, em perspectiva, os eixos das coordenadas  $x$ ,  $y$  e  $z$ , o retângulo ABCD e o ponto  $P = (0,0,12)$ .
- Determine as coordenadas do vértice C.
- Desenhe a figura plana resultante da projeção do retângulo ABCD no plano Oxy a partir do ponto P. Observação: essa projeção é o lugar geométrico dos pontos do plano Oxy que estão nas retas que passam por P e pelos pontos do retângulo.
- Calcule a área da figura obtida no item anterior.

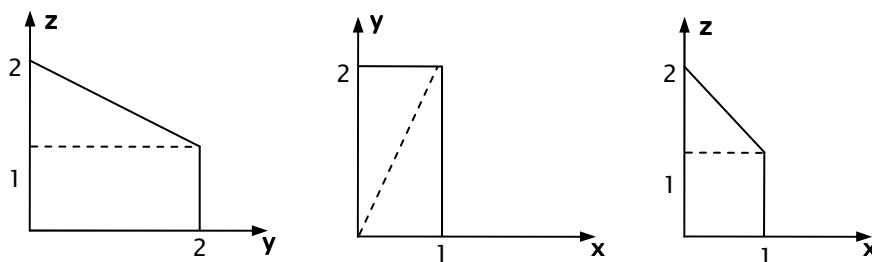
**3 FAUUSP 2005**

O cubo de vértices:  $A = (0,0,0)$ ,  $B = (6,0,0)$ ,  $C = (6,6,0)$ ,  $D = (0,6,0)$ ,  $E = (0,0,6)$ ,  $F = (6,0,6)$ ,  $G = (6,6,6)$  e  $H = (0,6,6)$  é cortado pelo plano que passa pelos pontos  $P = (2,0,0)$ ,  $Q = (0,2,0)$  e  $R = (6,4,6)$ .

- Desenhe a mão livre, em perspectiva, o cubo e o corte que esse plano faz no cubo.
- Determine as coordenadas espaciais dos vértices do polígono formado por este corte.
- Desenhe num plano cartesiano, com régua e compasso, o polígono obtido, sem perspectiva e considerando que a unidade dos eixos coordenados é de 1 cm.
- Calcule a área deste polígono.

**4 FAUUSP 2008**

Desenhe na folha de respostas uma representação espacial do poliedro cujas projeções são as seguintes:



Desenhe nessa representação a sombra desse poliedro no plano  $xy$ , quando iluminado por uma fonte de luz colocada no ponto  $P = (-2, -2, 4)$ .

**5 FAUUSP 2009**

A intersecção do plano PQR, que contém os pontos  $P = (0,0,15)$ ,  $Q = (4,0,12)$  e  $R = (0,4,12)$ , com as faces do cubo ABCDEFGH, de vértices:  $A = (0,0,0)$ ,  $B = (12,0,0)$ ,  $C = (12,12,0)$ ,  $D = (0,12,0)$ ,  $E = (0,0,12)$ ,  $F = (12,0,12)$ ,  $G = (12,12,12)$  e  $H = (0,12,12)$ , é um polígono. Quantos são os seus lados?

Determine, na folha de respostas, as coordenadas dos vértices desse polígono. Esboce uma representação espacial desse cubo, indicando também o polígono obtido.

**6 FAUUSP 2010**

Um prisma reto de altura 6 tem como base o retângulo ABCD cujos vértices têm coordenadas  $A = (0,0,0)$ ,  $B = (1,0,0)$ ,  $C = (1,2,0)$  e  $D = (0,2,0)$ .

a) Desenhe como instrumentos de precisão (régua e/ou esquadro e compasso) o prisma e a sua intersecção com o plano PQR em que  $P = (2,0,0)$ ,  $Q = (0,0,4)$  e  $R = (0,6,0)$ . Sendo  $A'$ ,  $B'$ ,  $C'$ , e  $D'$  os pontos de intersecção do plano com as arestas verticais do prisma, determine suas coordenadas. Podemos afirmar que o quadrilátero  $A'B'C'D'$  é um paralelogramo? Justifique sua resposta.

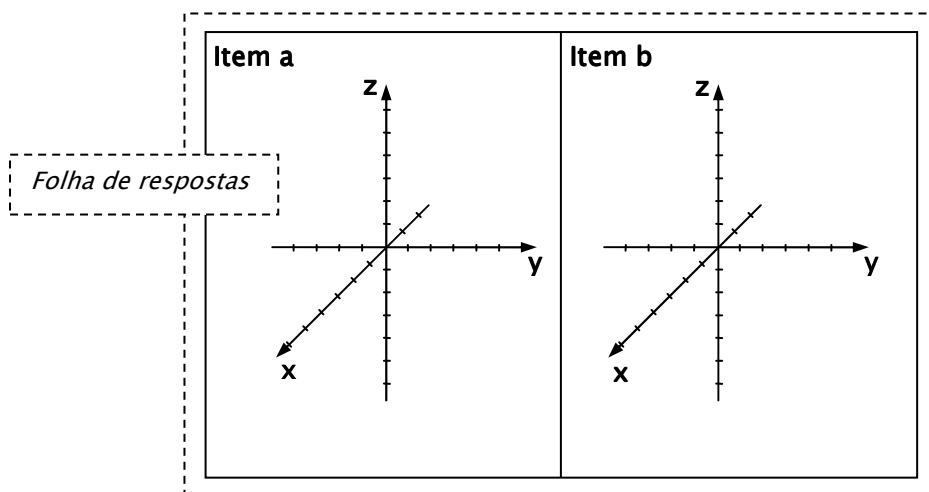
b) Sendo  $P = (2,0,0)$ ,  $Q = (0,0,4)$  e  $R = (0,m,0)$ , qual o valor de  $m > 2$  para que o quadrilátero  $A'B'C'D'$  seja um losango? Justifique sua resposta.

**7 FAUUSP 2011**

Na folha de respostas estão desenhados dois sistemas de coordenadas ortogonais Oxyz, um para o item a e outro para o item b desta questão. Em cada um deles, marque os pontos  $A = (0,0,0)$ ,  $B = (3,-3,-3)$ ,  $C = (6,0,-6)$  e  $D = (3,3,-3)$ . Estes pontos formam o quadrilátero ABCD.

a) Desenhe a pirâmide de base ABCD e vértice  $P = (0,0,6)$ , e desenhe o quadrilátero  $A'B'C'D'$  resultante da intersecção dessa pirâmide com o plano Oxy. Determine as coordenadas de seus vértices.

b) Desenhe a pirâmide de base ABCD e vértice  $Q = (6,3,3)$ , e desenhe o quadrilátero  $A'B'C'D'$  resultante da intersecção dessa pirâmide com o plano Oxy. Determine as coordenadas de seus vértices.



**8 FAUUSP 2012**

Desenhe na folha de respostas uma perspectiva do tetraedro de vértices  $A = (0,0,0)$ ,  $B = (2,0,0)$ ,  $C = (0,2,0)$  e  $D = (0,2,2)$ . Desenhe também o polígono obtido pela intersecção deste tetraedro com o plano que contém os pontos  $P = (0,0,2)$ ,  $Q = (0,1,0)$  e  $R = (2,0,2)$ .

