Sentenças matemáticas fechadas.

As sentenças matemáticas fechadas são expressões aritméticas em que todos os valores numéricos são conhecidos. Elas não apresentam variáveis, parâmetros ou qualquer tipo de incógnita.

Existem apenas dois tipos de sentenças matemáticas fechadas: as **verdadeiras** e as **falsas**.

$$2 = 2 \quad (V) \qquad\qquad 3 = 2 \quad (F) \qquad\qquad 4+4\times(4-4) < 4 \quad (F)$$

Sentenças matemáticas abertas

As sentenças matemáticas abertas são obtidas a partira das sentenças fechadas, mascarando-se um o mais de seus valores numéricos com termos algébricos representados por letras como **x** ou **y**.

Quando nos deparamos com uma sentença matemática aberta, não sabemos a princípio se ela foi obtida de uma sentença fechada verdadeira ou falsa. Então, os valores dos termos algébricos da sentença dependem apenas da sua natureza numérica: ordinal, cardinal, inteira, racional, real, positiva ou negativa. Isto é o que chamamos de domínio de uma variável.

Pode revoltar a alguns, o fato de que a sentença aberta **x = 3**, por exemplo, pode ter sido obtida da sentença fechada **2 = 3** que é evidentemente falsa! Quantas vezes não escrevemos x = 3 em situações cuja solução é 2, afinal somos nós que escrevemos cada passagem algébrica da resolução de um problema e, muitas vezes, cometemos erros tolos.

É importante estar ciente de que estamos procurando a solução do problema e não da última sentença aberta que escrevemos na tentativa de resolvê-lo. Por isso, recomenda-se, sempre que possível, substituir a variável da equação original pelos valores que encontramos a fim de verificar a veracidade da solução.

Algumas dessas sentenças abertas são chamadas de equações. As equações expressam perguntas e, portanto, devem ser lidas como tal. É como se toda equação quisesse saber: “Que valores me tornam verdadeira?” ou “Que valores me tornam falsa?”.

Respondemos as perguntas expressas pelas equações, escrevendo o seu conjunto verdade, também conhecido como conjunto solução. O conjunto solução de uma equação deve possuir todos os valores da variável que a tornam verdadeira e apenas eles. Assim, pode-se dizer que resolver uma equação é escrever o seu conjunto solução. Exemplos:

$$x=2 \Leftrightarrow S=\{2\} \qquad x^2=2x \Leftrightarrow S=\{0,2\} \qquad x^3=4x \Leftrightarrow S=\{-2,0,2\} \qquad x^3=x^2 \Leftrightarrow S=\{0,1\}$$

As sentenças abertas nos exemplos acima são chamadas de **equações polinomiais** de primeiro, segundo e terceiro grau respectivamente. O teorema fundamental da álgebra garante que o número de soluções de uma equação polinomial nunca ultrapassa o grau da equação. Assim, uma equação de quarto grau, por exemplo, possui no máximo quatro soluções.

Mas existem diversos tipos de equações que não são polinomiais, como as equações exponenciais, irracionais e trigonométricas, por exemplo. Nestes casos, não podemos nos valer do teorema fundamental da álgebra para prever o número de soluções.

O que todas as equações têm em comum é o fato de expressarem perguntas cujas respostas são os valores numéricos que as tornam sentenças matemáticas fechadas e verdadeiras. Veja alguns exemplos de equações não polinomiais e seus respectivos conjuntos solução no universo real:

$$5^x=-1 \Leftrightarrow S=\varnothing \qquad \sqrt[3]{2x+7}=3 \Leftrightarrow S=\{10\} \qquad \log x=2 \Leftrightarrow S=\{100\}$$

$$\frac{1}{x}=0 \Leftrightarrow S=\varnothing \qquad \frac{x^2-4}{x^2-2x}=0 \Leftrightarrow S=\{-2\} \qquad |x-3|=1 \Leftrightarrow S=\{2,4\}$$

$$(x-1)(x^2-3x)(x^2-4)=0 \Leftrightarrow S=\{-2,0,1,2,3\} \qquad \left(x^2-4x+4\right)^{x-2}=1 \Leftrightarrow S=\{1,2,3\}$$

$$\cos x=-1 \Leftrightarrow S=\{x\in\mathbb{R} \text{ tal que } x=\pi+2k\pi, k\in\mathbb{Z}\} \qquad \operatorname{sen}^2 x+\cos^2 x=1 \Leftrightarrow S=\mathbb{R}$$

Equações × Identidades

Observe que a sentença matemática aberta a seguir não se encaixa na categoria de equação polinomial, pois segundo o teorema fundamental da álgebra, nenhuma equação polinomial de segundo grau admite três soluções distintas:

$$(x+1)^2 - 2x = x^2 + 1$$

$$\begin{array}{lcll} x=0 & \Rightarrow & (0+1)^2 - 2\cdot 0 = 0^2 + 1 \ \text{(Verdadeiro)} & \Leftrightarrow \quad 0 \in S \\ x=3 & \Rightarrow & (3+1)^2 - 2\cdot 3 = 3^2 + 1 \ \text{(Verdadeiro)} & \Leftrightarrow \quad 3 \in S \\ x=5 & \Rightarrow & (5+1)^2 - 2\cdot 5 = 5^2 + 1 \ \text{(Verdadeiro)} & \Leftrightarrow \quad 5 \in S \end{array}$$

A expressão $(x+1)^2 - 2x = x^2+1$ é uma sentença matemática que, embora aberta, é verdadeira para qualquer valor da variável x. As sentenças abertas deste tipo expressam fatos aritméticos e são chamadas de IDENTIDADES. Mas, se quisermos tratar a sentença do exemplo acima como uma equação, e determinar seu conjunto solução, então este conjunto será o próprio domínio da variável:

$$(x+1)^2 - 2x = x^2+1 \Leftrightarrow S = \mathbb{R}$$

As identidades são todas as sentenças matemáticas abertas que expressam uma ralação de igualdade verdadeira para todos os valores de suas variáveis, desde que estejam de acordo com as condições de existência da expressão. O símbolo (=) é usado para expressar as relações de igualdade algébricas, sejam elas perguntas (equações) ou fatos (identidades), mas o símbolo (≡) só deve ser usado numa identidade. Assim, percebendo-se que uma sentença aberta indicada com o símbolo (=) é uma identidade, devemos trocar sua relação de igualdade pelo símbolo (≡), deixando claro que a sentença não deve ser tratada como uma pergunta, mas como um fato. Exemplos:

$$x^2 \equiv x\cdot x \qquad (x^2-9)(x+2) \equiv x^3+2x^2-9x-18 \qquad \frac{x^2+4}{2x} \equiv \frac{x}{2}+\frac{2}{x} \qquad \log(x^2) \equiv 2\log|x|$$

Os dois primeiros exemplos acima têm domínio real, mas os dois últimos apresentam identidades válidas apenas quando $x \neq 0$. Devemos estar atentos ao fato de que o símbolo (≡) é usado para indicar sentenças que são verdadeiras sempre que a existência, tanto do primeiro quanto do segundo membro estão garantidas.

Técnicas de manipulação de identidades

Propriedade distributiva da multiplicação em relação à adição e à subtração:

$$A(B+C) \equiv AB+AC \qquad (B+C)A \equiv BA+CA$$

$$A(B-C) \equiv AB-AC \qquad (B-C)A \equiv BA-CA$$

$$(A+B)(X+Y) \equiv A(X+Y)+B(X+Y) \equiv AX+AY+BX+BY$$

Exercício: Efetue o produto dos polinômios $Q(x) = x^3 + 4x^2 + 3x - 2$ e $d(x) = x^2 + 5x - 1$.