Identidades do terceiro grau

"O cubo da soma equivale é igual ao triplo do produto vezes a soma mais à soma dos cubos"

Observe atentamente, cada passagem da dedução desta identidade:

$$(A+B)^3 \equiv (A+B)(A+B)(A+B) \equiv \mathbf{AAA}+\underline{AAB}+\underline{ABA}+\underline{ABB}+\underline{BAA}+\underline{BAB}+\underline{BBA}+\mathbf{BBB}$$

$$(A+B)^3 \equiv \mathbf{A^3} + \underline{3A^2B} + \underline{3AB^2} + \mathbf{B^3}$$

$$\boxed{(A+B)^3 \equiv 3AB(A+B) + \mathbf{A^3}+\mathbf{B^3}}$$

Esta identidade ficou famosa por ter sido usada para dar consistência ao primeiro processo de resolução das equações de terceiro grau que se tem notícia descoberto apenas no início do século XVI. Os matemáticos envolvidos nessa descoberta foram Scipione del Ferro, Niccolò Fontana "Tartáglia" e Girolamo Cardano.

O processo completo combina o uso desta identidade a uma série de mudanças de variáveis, que permite encontrar uma solução resolvendo-se um sistema de equações do tipo "soma e produto" que pode ser resolvido como uma equação do segundo grau. Depois de encontrada a primeira das três soluções, pode-se efetuar uma divisão polinomial para se obter outra equação do segundo grau que forneça as demais soluções.

A mudança de variável é uma atribuição algébrica e, embora também seja indicada por uma relação de igualdade, a atribuição expressa uma idéia bem diferente das equações e das identidades.

Enquanto as equações expressam perguntas que devam ser respondidas, e as identidades expressam fatos descobertos ao longo do estudo da matemática, as atribuições expressam imposições momentâneas que devem ser declaradas e consideradas verdadeiras apenas durante a execução do processo algébrico em que são aplicadas. As atribuições matemáticas são voluntárias e, portanto, exigem iniciativa e criatividade. Exemplo:

Para resolver uma equação como $x+\sqrt{x-1}=13$, podemos impor uma relação de atribuição como $y=\sqrt{x-1}$, que implica $x=y^2+1$ com $y \geq 0$, e mudar as variáveis da equação original obtendo-se a equação do segundo grau: $y^2+1+y=13 \Leftrightarrow y^2+y-12=0$, cujas soluções são 3 e –4, mas como $y \geq 0$, temos $y = 3$ e, portanto $x=3^2+1=10$.

$$\mathbf{x+\sqrt{x-1}=13 \quad \Leftrightarrow \quad S=\{10\}}$$

O grande risco que corremos ao fazer uma mudança de variável é tomar os valores obtidos para variável criada como sendo as soluções do problema.

Exercícios:

1. Reescreva as equações a seguir, fazendo as mudanças de variável solicitadas em cada caso:

a) $y^2+4y+3=0$, fazendo $y = x-2$.

b) $x^3-5x^2+7x-3=0$, fazendo $x = y+1$.

c) $y^3+6y^2+10y-10=0$, fazendo $y = x-2$.

d) $x^3 = 2x - 6$, fazendo $x = y-1$.

e) $x^3 = x^2$, fazendo $y = 1-2x$.

f) $x\sqrt{x}=18-x$, fazendo $y=\sqrt{x}$.

2 Fuvest. A diferença entre o cubo da soma de dois números inteiros e a soma de seus cubos pode ser:

A) 4

B) 5

C) 6

D) 7

E) 8

Equações de terceiro grau.

Cardano descobriu que fazendo $\mathbf{X} = x - \frac{b}{3a}$, poderia transformar qualquer equação completa do terceiro grau $ax^3+bx^2+cx+d = 0$, em equações incompletas da forma: $\mathbf{X}^3 = P \cdot \mathbf{X} + Q$

Tartáglia sabia como resolvê-las comparando-as à identidade: $\mathbf{(a+b)}^3 \equiv 3ab\cdot\mathbf{(a+b)} + a^3+b^3$

Assim, fazendo-se $\mathbf{X} = \mathbf{a+b}$, podemos concluir tanto que $3ab=P$ quanto que $a^3+b^3 = Q$.

Então, se os valores de P e Q são conhecidos, basta encontrar dois números a e b conhecendo-se o triplo de seu produto (P) e a soma de seus cubos (Q). Exemplo:

Pode-se encontrar um valor de x que resolva à equação $x^3 = 6x + 9$, procurando-o em duas parcelas **a** e **b**, se for feita a atribuição $x=a+b$, pois a identidade $\mathbf{(a+b)^3 \equiv 3ab(a+b) + a^3+b^3}$ garante que estes números a e b devem satisfazer ao sistema formado pelas equações $3ab=6$ e $a^3+b^3=9$.

Da primeira equação temos: $3ab=6 \Leftrightarrow ab=2$ que elevada ao cubo fica: $a^3b^3=8$.

Depois disso, fazendo $\mathbf{A=a^3}$ e $\mathbf{B=b^3}$ (outra atribuição), o problema passa a ser encontrar a solução do sistema $\begin{cases} A+B=8 \\ A\cdot B=9 \end{cases}$, ou seja, encontrar dois números A e B cujo produto é oito e a soma é nove.

Resolver um sistema do tipo soma e produto, equivale a resolver uma equação do segundo grau e, neste caso: A e B são as soluções da equação $w^2 - 9w+8 = 0$, ou seja, os números 8 e 1.

O sistema de atribuições feitas até aqui é $\begin{cases} x = a+b \\ A = a^3 \\ B = b^3 \end{cases}$, portanto: $x = \sqrt[3]{A}+\sqrt[3]{B} = \sqrt[3]{8}+\sqrt[3]{1} = 3$.

Identidades do terceiro grau

A lista a seguir é das principais identidades de terceiro grau relacionadas à identidade de Tartáglia:

O cubo da soma: $(A+B)^3 \equiv A^3 + 3A^2B + 3AB^2 + B^3$

O cubo da diferença: $(A-B)^3 \equiv A^3 - 3A^2B + 3AB^2 - B^3$

A soma dos cubos: $A^3 + B^3 \equiv (A+B)(A^2-AB+B^2)$

A diferença dos cubos: $A^3 - B^3 \equiv (A-B)(A^2+AB+B^2)$

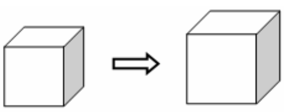
As relações entre os coeficientes e as raízes de uma equação do terceiro grau, conhecidas com as **relações de Girard**, podem ser deduzidas da seguinte identidade polinomial:

$$(x-r)\cdot(x-s)\cdot(x-t) \equiv x^3 - (r+s+t)\cdot x^2 + (rs+rt+st)\cdot X - rst$$

Exercícios:

3. Calcule o valor da expressão $\frac{2012^3-1}{2012^2+2013}$.

4. Sabe-se que um aumento de 1 cm nas arestas de um determinado cubo, faz com que seu volume aumente em 91 cm^3, e sua área aumente em x cm^2. Determine x.



5. Encontre pelo menos uma solução real de cada equação a seguir:

a) $x^3 = 3x + 2$

b) $x^3 = 6x + 6$

c) $x^3 = 15x + 4$