Produtos notáveis

Os produtos notáveis devem ser compreendidos e visualizados a partir das combinações entre os termos distribuídos. Afinal, todos os produtos notáveis podem ser obtidos diretamente da aplicação da propriedade distributiva da multiplicação, mesmo aqueles que apresentam potencias como $(A+B)^2$ e $(A+B)^3$, uma vez que a potenciação abrevia multiplicações sucessivas.

$$(A+B)^2 \equiv (A+B)(A+B) \equiv A \cdot A + A \cdot B + B \cdot A + B \cdot B \equiv A^2 + 2AB + B^2 \iff \mathbf{(A+B)^2 \equiv A^2 + 2AB + B^2}$$

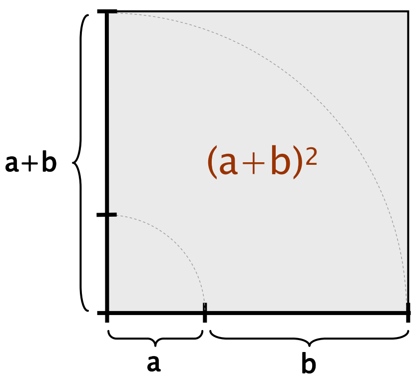
$$(A-B)^2 \equiv (A-B)(A-B) \equiv A \cdot A - A \cdot B - B \cdot A + B \cdot B \equiv A^2 - 2AB + B^2 \iff \mathbf{(A-B)^2 \equiv A^2 - 2AB + B^2}$$

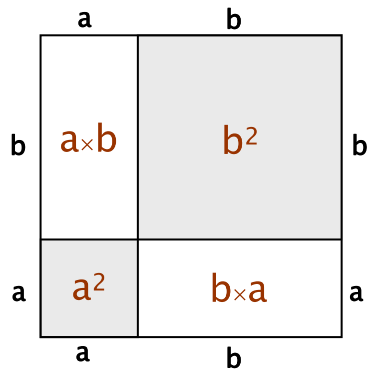
$$(A+B)(A-B) \equiv A \cdot A - A \cdot B + B \cdot A - B \cdot B \equiv A^2 - B^2 \iff \mathbf{(A+B)(A-B) \equiv A^2 - B^2}$$

No período da renascença, os matemáticos europeus não dispunham de uma notação algébrica eficiente para descrever as sentenças matemáticas, isso era feito através de versos ou ladainhas ritmadas. Até hoje este recurso é usado para facilitar a memorização de identidades. A expressão resultante de $(a+b)^2$, por exemplo, é bastante conhecida, numa versão informal, como: "*o quadrado do primeiro, mais duas vezes o primeiro vezes o segundo, mais o quadrado do segundo*".

Uma versão em linguagem formal desta identidade seria: "*O quadrado da soma de dois números equivale à soma dos seus quadrados mais o dobro do produto desses números*".

Uma interpretação geométrica desta identidade pode ser ilustrada construindo-se um quadrado cujo lado é formado pela soma das medidas de dois segmentos **a** e **b**, e verificar que nele cabem um quadrado de lado **a**, um quadrado de lado **b** e dois retângulos de lados **a** e **b**.





A relação de identidade (≡) permite expressar verdades sobre o conjunto dos números reais que vão além dos produtos notáveis.

Ora, se: "*O quadrado da soma é **igual** à soma dos quadrados **mais** o dobro do produto*",

então: "*A soma dos quadrados é **igual** ao quadrado da soma **menos** o dobro do produto*".

$$\mathbf{(A+B)^2 \equiv A^2+B^2 + 2AB} \qquad \mathbf{A^2+B^2 \equiv (A+B)^2 - 2AB}$$

E, se considerarmos uma soma com três ou mais parcelas, ainda temos que:

"*O quadrado da soma é **igual** à soma dos quadrados **mais** os dobros dos produtos dois a dois*"

$$\mathbf{(A+B+C)^2 \equiv A^2 + B^2 + C^2 + 2AB + 2AC + 2BC}$$

Testes:

1. Assinale a alternativa que apresenta, em língua portuguesa, a versão correta da identidade matemática $(a-b)^2 \equiv a^2+b^2-2ab$.

A) A diferença dos quadrados é igual ao produto entre a soma e a diferença.
B) A diferença dos quadrados é igual à soma dos quadrados menos o dobro do produto.
C) O quadrado da diferênça é igual à diferença dos quadrados mais o produto.
D) O quadrado da diferênça é igual à soma dos quadrados menos o dobro do produto.
E) O quadrado da diferênça é igual ao produto entre a soma e a diferença.

2. Uma folha quadrada de cartolina teve uma de suas pontas recortadas e um pedaço também quadrado lhe foi tirado (figura 1). Depois disso outro recorte foi feito sobre uma linha pontilhada (figura 2), mas nenhum pedaço foi dispensado. Eles foram colocados lado a lado formando um único retângulo (figura 3):

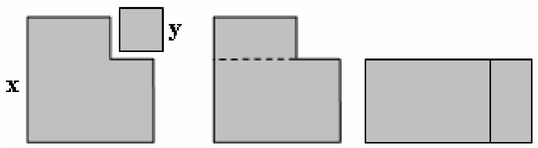


Figura 1 Figura 2 Figura 3

Sendo **x** a medida do lado da folha de cartolina original e **y** a medida do lado do quadrado recortado, a identidade matemática que melhor expressa a equivalência entre as áreas das figuras 2 e 3 é:

A) $(x+y)^2 = x^2+2xy+y^2$
B) $(x-y)^2 = x^2-2xy+y^2$
C) $x^2-y^2 = (x+y)(x-y)$
D) $x^2+y^2 = (x+y)^2-2xy$
E) $x(x+y) = x^2+xy$

4. Calculando-se $\dfrac{2011^2-1}{2012}$, obtemos:

A) 2011
B) 2010
C) 2009
D) 2008
E) 2007

5. Se x=17 e y=5168 então $\dfrac{xy-y^2}{xy-x^2}$ é igual a:

A) –34
B) –304
C) 34
D) 304
E) 3004

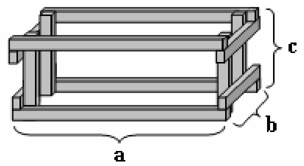
6. O proprietário de um terreno retangular deseja cerca-lo, e para foi até o terreno para medir o seu perímetro. Mas, como chovia muito, o proprietário resolveu medir apenas o comprimento de diagonais do terreno e fazer os cálculos em seu escritório, pois ele sabe que se **x** e **y** são as dimensões de um retângulo, então:

$$\text{Diagonal} = \sqrt{x^2+y^2}$$
$$\text{Área} = x \cdot y$$
$$\text{Perímetro} = 2x+2y$$

Assinale a alternativa que expressa corretamente o perímetro do retângulo em função de sua área e diagonal:

A) $\text{Perímetro} = 2 \cdot \sqrt{\text{Área} + 2 \cdot \text{Diagonal}^2}$
B) $\text{Perímetro} = 2 \cdot \sqrt{\text{Diagonal}^2 + 2 \cdot \text{Área}}$
C) $\text{Perímetro} = 2 \cdot \sqrt{\text{Diagonal}^2 + \text{Área}}$
D) $\text{Perímetro} = \sqrt{\text{Área}^2 + 2 \cdot \text{Diagonal}}$
E) $\text{Perímetro} = 2 \cdot \left(\text{Diagonal} + \sqrt{2 \cdot \text{Área}}\right)$

7. Quatro ripas de madeira, com 1,9 m de comprimento cada, foram igualmente cortadas em três pedaços de tamanhos **a**, **b** e **c**. Depois os pedaços cortados foram pregados, uns aos outros, para montar uma caixa com a forma de um paralelepípedo como mostra a figura:



Sabe-se que, num paralelepípedo como este, são válidas as expressões:

$$\text{Volume} = a \cdot b \cdot c$$
$$\text{Área total} = 2(ab + ac + bc)$$
$$\text{Diagonal} = \sqrt{a^2+b^2+c^2}$$

Se depois de montado, este paralelepípedo foi completamente revestido de papelão, e para tal revestimento, foram usados 1,92 m² de papelão, pode-se concluir que a diagonal do paralelepípedo montado mede:

A) 1,3 m
B) 1,2 m
C) 1,1 m
D) 1,0 m
E) 0,9 m