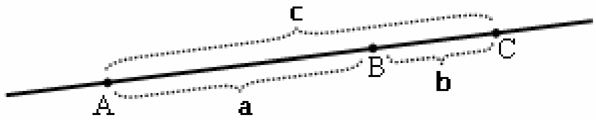
Operadores

No universo dos números reais, há sete operações aritméticas definidas, sendo que seis delas são indicadas por síbolos específicos: + , – , × , ÷ , ∧ , √ , e a outra é indicada pela sigla **log**.

A adição é a mais intuitiva das operações aritméticas. Não é necessário o uso de algarismos ou de palavras para compreendermos que \\\ + \\ = \\\\\.

A interpretação geométrica da adição também tem este caráter intuitivo:



$\Rightarrow$ $a + b = c$

Se A, B e C são pontos colineares e B pertence ao segmento AC então AB + BC = AC.

Os valores operados pela adição são chamados de parcelas, e seu resultado é chamado de soma.

A multiplicação entre os números inteiros positivos pode ser definida como uma adição de sucessivas parcelas iguais. O numeral que indica a quantidade de parcelas e o valor destas parcelas são ambos, chamados de fatores. O resultado das multiplicações é chamado de produto.

Dizemos também que todo produto é múltiplo de seus fatores. Palavras como dobro e triplo, indicam multiplicidades de um determinado valor:

- O *dobro* de **a** é **a+a** ou ainda **2a**.
- O *triplo* de **a** é **a+a+a** ou ainda **3a**.

Depois o conceito desta operação é estendido, com o auxílio da regra de sinais, para os números negativos e, no estudo da geometria, o conceito pode abrir mão do termo que indica a quantidade de fatores para definir o produto de dimensões como sendo o valor da área de um retângulo ou do volume de um paralelepípedo, por exemplo.

O retângulo de lados congruentes é chamado de quadrado e o paralelepípedo reto-retângulo regular é chamado de cubo e, tanto a área do primeiro como o volume do segundo são obtidos multiplicando-se valores iguais. A multiplicação de fatores iguais pode ser expressa pela operação de potenciação.

Eis as primeiras potências de um número **a**:

- O *quadrado* de **a** é **a·a** ou ainda **a²**.
- O *cubo* de **a** é **a·a·a** ou ainda **a³**.

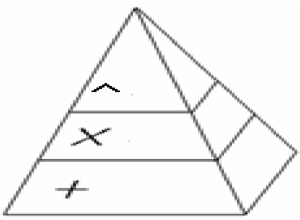
Observe que a potenciação é estruturada a partir da multiplicação assim como a multiplicação é estruturada a partir da adição. Isto nos sugere certa relação de <u>hierarquia</u> entre estas três operações aritméticas. O símbolo + representa o operador de adição. O símbolo × representada o operador de multiplicação, mas para não ser confundido com a variável “xis” no estudo da álgebra, este símbolo é freqüentemente substituído por um simples ponto “•” ou até completamente omitido como na expressão **2a**, que indica o dobro de um número a.

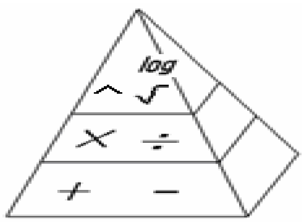
O símbolo ^ representa o operador da potenciação, que embora seja raramente usado, indica a quinta potência do número 2 por 2^5. (Lê-se: dois elevado à quinta potência).

Uma manifestação da <u>hierarquia</u> entre essas operações pode ser observada na sentença aritmética:

$$5 + 4 \times 3 \wedge 2 \;=\; 5 + 4 \cdot 3^2 \;=\; 5 + 4 \cdot 9 \;=\; 5 + 36 \;=\; 41$$

Note que as operações aritméticas desta sentença foram efetuadas na seguinte ordem: primeiro a potenciação, depois a multiplicação e por fim a adição.





Para alterar a ordem estabelecida por esta relação de hierarquia, utilizam-se parênteses ou colchetes:

(1 + 3) ^ 2 = 4 ^ 2 = 16.

Adição	Multiplicação	Potenciação
$a + b = c$	$\underbrace{a + a + a + \ldots + a}_{n \text{ parcelas}} = n \cdot a$	$\underbrace{a \cdot a \cdot a \cdot \ldots \cdot a}_{n \text{ fatores}} = a^n$
Associativa	Associativa	**Não associativa**
$(a+b)+c = a+(b+c) = a+b+c$	$(a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c) = a \cdot b \cdot c$	$(a^b)^c \neq a^{(b^c)}$
Comutativa	Comutativa	**Não comutativa**
$a + b = b + a$	$a \cdot b = b \cdot a$	$a^b \neq b^a$

A potenciação não é uma operação associativa nem comutativa, e Isto a torna uma operação bem mais delicada que, por não compartilhar das propriedades da adição e da multiplicação, apresenta uma vasta coleção de propriedades particulares bem mais sofisticadas do que a associativa e a comutativa.

Propriedades das potências

Para potências de mesma base e expoentes diferentes temos três regras válidas em todos os casos cuja base é positiva e não unitária (base > 0 e base ≠1):

I. O expoente do produto é igual à soma dos expoentes dos fatores: $b^r \cdot b^s = b^{r+s}$

II. O expoente da razão é a diferença entre os expoentes do numerador e do denominador: $\dfrac{b^r}{b^s} = b^{r-s}$

III. Os expoentes da potência de outra potência comutam entre si: $\left(b^r\right)^s = b^{r \cdot s} = b^{s \cdot r} = \left(b^s\right)^r$

A potenciação é uma operação distributiva em relação à multiplicação e à divisão, mas não é distributiva em relação à adição ou à subtração. Assim, sendo a > 0 e b > 0 temos:

IV. $(a \cdot b)^n = a^n \cdot b^n$ **V.** $\left(\dfrac{a}{b}\right)^n = \dfrac{a^n}{b^n}$

VI. $(a+b)^n \neq a^n + b^n$ exceto quando n = 1.

Eis as principais conseqüências destas propriedades:

VII. Para todo a real temos que: $\begin{cases} a^1 = a \\ a^0 = 1 \end{cases}$

VIII. Se a ≠ 0 então $a^{-1} = \dfrac{1}{a}$ e se a > 0 temos que: $a^{-n} = \dfrac{1}{a^n}$.

IX. Sendo a ≠ 0 e b ≠ 0 temos que: $\left(\dfrac{a}{b}\right)^{-1} = \dfrac{b}{a}$, e combinando VIII e IX podemos afirmar que: $\left(\dfrac{2}{3}\right)^{-2} = \dfrac{9}{4}$.

X. Sendo a > 0 e d ≠ 0 temos que: $a^{\frac{n}{d}} = \sqrt[d]{a}^{\,n} = \sqrt[d]{a^n}$

Devido ao fato das potências pares dos números negativos serem positivas, um cuidado especial deve ser tomado, no universo dos números reais, em relação às equações do tipo **x^n = a** quando **n** é **par** diferente de zero. Assim, se **a** for positivo teremos: **x** = $\pm\sqrt[n]{a}$. Mas se **a** for negativo, a equação **x^n = a** não possui solução real e, nos casos em que **n** é **ímpar**, temos que **x^n = a** implica **x** = $\sqrt[n]{a}$ não importando qual seja o sinal de **a**.

$x^2 = 9 \Leftrightarrow S = \{-3, 3\}$ $x^2 = -9 \Leftrightarrow S = \varnothing$ $x^3 = 8 \Leftrightarrow S = \{2\}$ $x^3 = -8 \Leftrightarrow S = \{-2\}$

Operações inversas

Para descrever os processos de resolução algébrica das equações criadas a partir da adição, da multiplicação ou da potenciação, usamos outros operadores como (–) e (÷) que indicam a subtração e a divisão, respectivas operações inversas da adição, da multiplicação.

A potenciação não é comutativa como a adição ou a multiplicação, $a^b \neq b^a$ com raras exceções: $4^2 = 2^4$. Tente encontrar outro par de números inteiros distintos que comutam na potenciação como 2 e 4.

Por isso, são necessárias duas operações distintas para inverter a potenciação: uma para isolar a base invertendo o expoente – **a radiciação** – e outra para isolar o expoente invertendo a base, **o logaritmo**.

$$x + 3 = 5 \iff x = 5 - 3 = 2 \iff S = \{2\}$$
$$3 \cdot x = 12 \iff x = 12 \div 3 = 4 \iff S = \{4\}$$
$$x^3 = 729 \iff x = \sqrt[3]{729} = 9 \iff S = \{9\}$$
$$3^x = 729 \iff x = \log_3 729 = 6 \iff S = \{6\}$$

Para indicar as distintas inversões da potenciação escrevemos dois operadores diferentes: um deles é representado pelo o símbolo radical – $\sqrt{\ }$ – e o outro é a sigla – **log** – da palavra logaritmo.

Logaritmo significa expoente e a operação logarítmica calcula os valores dos expoentes das equações exponenciais. Calcular $\sqrt[3]{729}$ é extrair a raiz cúbica do número 729 e da mesma forma dizemos que extrair o logaritmo de 729 na base 3 é calcular $\log_3 729$.

Sendo E, B e P números reais positivos, respectivamente expoente, base e potência da mesma operação de potenciação então, com exceção do caso em que B = 1, temos que:

$$E = \log_B P \iff B^E = P \iff B = \sqrt[E]{P}$$

A terceira potência de 2 é o numero 8, então, 2 é a raiz cúbica de 8, e 8 é o logaritmo de 8 na base 2:

$$\log_2 8 = 3 \iff 8 = 2^3 \iff \sqrt[3]{8} = 2$$

Extrair um logaritmo é bem mais parecido com efetuar uma divisão do que extrair uma raiz. Para começar, podemos extrair um logaritmo inteiro positivo usando a chave de divisão sucessiva que decompõe um número inteiro em fatores primos.

Da mesma forma que obtemos o resultado da divisão de um número N por um número D não nulo, contando o número de parcelas D que totalizam N, podemos obter o logaritmo de um número positivo P numa base B, positiva e não unitária, contando quantos são os fatores iguais a B que produzem P. Exemplos:

$$D + D + D + D + D = N \iff \frac{N}{D} = 5 \qquad B \cdot B \cdot B \cdot B \cdot B = P \iff \log_B P = 5$$

A operação logarítmica pode ser comparada à divisão. Como se fosse a "divisão" de um número em fatores iguais, não em parcelas iguais como na divisão tradicional. O quociente de 8 por 2 é **quatro**, pois o número 8 pode ser separado em **quatro** parcelas iguais a 2. O logaritmo de 8 na base 2 é **três**, pois o número 8 pode ser separado em **três** fatores iguais a 2.

Os termos matemáticos logaritmo e expoente são sinônimos. Isto significa que podemos trocar a palavra expoente por logaritmo em qualquer texto e obter a mesma idéia enunciada agora em termos logarítmicos. As orações serão mesmo muito parecidas, mas quando postas em notação algébrica não se parecem tanto assim.

$$a^r \cdot a^s = a^{r+s}$$

"O **expoente** do produto é igual à soma dos **expoentes** dos fatores."

"O **logaritmo** do produto é igual à soma dos **logaritmos** dos fatores."

$$\log(x \cdot y) = \log x + \log y$$

Logaritmos

Sendo **a** e **b** números reais positivos tais que **b≠1**, então existe um único número real **x** tal que **b^x = a** e, neste caso, diremos que **x** é o logaritmo de **a** na base **b**.

$$b^x = a \iff x = \log_b a$$

Na potenciação: $\begin{cases} \text{b é a base.} \\ \textbf{x é o expoente.} \\ \text{a é a potência.} \end{cases}$ Mas, na nova nomenclatura: $\begin{cases} \text{a é o Logaritimando ou anti-logaritmo.} \\ \text{b continua sendo a base.} \\ \textbf{x é o logaritmo.} \end{cases}$

Como enunciado, as condições de existência do logaritmo de **a** na base **b** são três: **b ≠ 1**, **b > 0** e **a > 0**.

I. b ≠ 1, pois se b = 1 teríamos $b^x = 1^x = 1$ para todo x real, e assim o logaritmo fica indeterminado.

II. b > 0, pois se b = –2 e x = ½ ,por exemplo, teríamos $b^x = (-2)^{½} = \sqrt{-2} \notin \mathbb{R}$.

III. a > 0 é conseqüência da última condições pois se b > 0 temos que $b^x > 0$,∀ x∈ℝ.

Satisfeitas as condições de existência, as quatro propriedades a seguir são conseqüências diretas da definição:

$$\log_b 1 = 0 \qquad \log_b b = 1 \qquad \mathbf{\log_b b^n = n} \qquad \mathbf{b^{\log_b n} = n}$$

Como a operação logarítmica é uma das inversões da potenciação, existe a lei do cancelamento das bases descrita pelas duas últimas das propriedades acima. Perceba que cada uma delas apresenta, em ordens diferentes, uma potencia e um logaritmo, de mesma base, aplicados consecutivamente a um mesmo número real **n**. Nestes casos, podem-se cancelar as bases obtendo-se como resultado o próprio número **n**.

Logaritmo decimal

Chamamos de logaritmo decimal de um número positivo, ao valor de seu logaritmo na base 10 e, da mesma forma que omitimos o índice 2 da raiz quadrada, também podemos omitir a base 10 dos logaritmos decimais:

$$\log 0{,}1 = -1 \qquad \mathbf{\log 1 = 0} \qquad \mathbf{\log 10 = 1} \qquad \log 100 = 2 \qquad \log 1000 = 3 \qquad \mathbf{\log 10^x = x} \qquad \mathbf{10^{\log x} = x}$$

Logaritmo natural

Logaritmo natural de um número positivo é o valor de seu logaritmo na base irracional $\mathbf{e} \approx 2{,}7182\ldots$, que embora seja conhecida como a constante de Euler, foi o matemático Napier que a consagrou como base para logaritmos. Atualmente usamos a sigla **ln** para indicar o logaritmo natural (ou neperiano) de um número positivo:

$$\ln(1/e^2) = -2 \qquad \ln(1/e) = -1 \qquad \mathbf{\ln 1 = 0} \qquad \mathbf{\ln e = 1} \qquad \ln e^2 = 2 \qquad \ln e^3 = 3 \qquad \mathbf{\ln 10^x = x} \qquad \mathbf{e^{\ln x} = x}$$

Tábuas de logaritmos

Como já foi citado, o logaritmo do produto é igual à soma dos logaritmos dos fatores. Esta propriedade operacional faz dos logaritmos excelentes simplificadores de cálculos. Imaginem que para efetuar o produto de três números maiores que mil são necessárias, no mínimo, 128 consultas à tabuada e duas adições de números com nove dígitos. Infernal!

Hoje temos computadores para isso, mas não foi sempre assim. Antes tínhamos que anotar tudo e consultar as tábuas de logaritmos, imensas tabelas de valores dos logaritmos.

As tábuas logarítmicas, livros de bolso que precederam nossas calculadoras, não apresentam apenas logaritmos inteiros. Algumas delas apresentam, numa mesma base, os logaritmos de milhares de números, inteiros e decimais. Mas como grande parte dos logaritmos são números irracionais, seus valores eram geralmente aproximados com quatro casas decimais.

A tabela a seguir apresenta os valores dos logarítmos de alguns números N em quatro bases distintas:

N	Logaritmo base 2	base 0,5	base 10	natural
2	**1**	**– 1**	0,3010	0,6931
3	1,5850	–1,5850	0,4771	1,0986
4	**2**	**– 2**	0,6030	1,3863
5	2,3219	–2,3219	0,6990	1,6094
6	2,5850	–2,5850	0,7782	1,7918
7	2,8074	–2,8074	0,8471	1,9459
8	**3**	**– 3**	0,9030	2,0794
9	3,1699	–3,1699	0,9542	2,1972
10	3,3219	–3,3219	**1**	2,3026
11	3,4594	–3,4594	1,0414	2,3979
12	3,5850	–3,5850	1,0792	2,4849
13	3,7004	–3,7004	1,1139	2,5649
14	3,8074	–3,8074	1,1461	2,6391
15	3,9069	–3,9069	1,1761	2,7081
16	**4**	**– 4**	1,2041	2,7726

N	Logaritmo base 2	base 0,5	base 10	natural
997	9,9614	–9,9614	2,9987	6,9048
998	9,9629	–9,9629	2,9991	6,9058
999	9,9643	–9,9643	2,9996	6,9068
1000	9,9658	–9,9658	**3**	6,9078
1001	9,9672	–9,9672	3,0004	6,9088
1002	9,9687	–9,9687	3,0009	6,9098
1003	9,9701	–9,9701	3,0013	6,9108
...	...	...	...	...
1020	9,9944	–9,9944	3,0086	6,9276
1021	9,9958	–9,9958	3,0090	6,9285
1022	9,9972	–9,9972	3,0095	6,9295
1023	9,9986	–9,9986	3,0099	6,9305
1024	**10**	**– 10**	3,0103	6,9315
1025	10,0014	–10,0014	3,0107	6,9324
1026	10,0028	–10,0028	3,0111	6,9334

Observe nesta tabela, que a soma dos logaritmos decimais dos números **3** e **5** é igual ao logaritmo decimal do número **15**, ou seja, que: 0,4771+0,6990 = 1,1761. Em termos exponenciais, isso se deve ao fato de que o produto entre os números 3 e 5 é igual a 15:

$$3 \cdot 5 = 10^{0,4771} \cdot 10^{0,6990} = 10^{0,4771 + 0,6990} = 10^{1,1761} = 15$$

Na prática não se recorre aos logaritmos para efetuar o produto **3** vezes **5**, mas por exemplo, para efetuar o produto entre os números 756, 1.025 e 6.743, as tábuas logarítmicas são de grande utilidade reduzindo o trabalho da multiplicação a apenas quatro consultas e uma adição. Veja o que acontece na base 10:

	756	$\xrightarrow{\text{Consulta}}$	2,8785 +
	1.025	$\xrightarrow{\text{Consulta}}$	3,0107 +
x	6.753	$\xrightarrow{\text{Consulta}}$	3,8295
	5.232.388.711	$\xleftarrow[\text{Consulta inversa}]{}$	9,7187

O resultado exato deste produto é 5.232.899.700, mas o erro cometido nessa aproximação é de 0,01%.

Atualmente não procedemos desta forma, pois temos aparelhos eletrônicos capazes de efetuar esses cálculos em menos de um segundo. Mas depois de concebidos os logaritmos, outras aplicações foram descobertas, e novas escalas foram criadas.

O tempo que leva uma aplicação financeira para duplicar um capital, é expresso por um logaritmo, bem como os tempos que levam colônias de bactérias para duplicar ou triplicar sua população. Na química, o potencial hidrogeniônico de uma mistura (P.H.), é o cologaritmo decimal de sua concentração molar. Na física, a escala de intensidade sonora medida em decibéis é logarítmica da mesma forma que a escala Richter para medir o poder de um abalo sísmico.

A taxa de variação unitária de uma escala logarítmica não é linear e depende da base em que os logaritmos foram calculados. Assim, quando ouvirmos as notícias de dois terremotos que atingiram respectivamente 5 e 6 pontos na escala Richter, que é de base **dez**, devemos compreender que a pertencia do segundo não é apenas 20% superior à do primeiro e sim **dez** vezes mais poderoso. Se um terceiro terremoto atingir 7 pontos nessa escala sua potência será **100** vezes a potência do primeiro, de apenas 5 pontos.

Outras siglas associadas aos logaritmos

O cologaritmo de um número positivo x é o oposto de seu logaritmo: $\operatorname{colog}_b x = -\log_b x$

O antilogaritmo de x na base b é o mesmo que a potência de expoente x e base b: $\operatorname{antilog}_b x = b^x$

Mudança de base

Vimos uma propriedade dos logaritmos que nos permite contornar multiplicações efetuando-se algumas consultas e adições, mas além dela, há outras propriedades operacionais que nos permitem contornar divisões, potenciações e até radiciações, efetuando-se operações mais simples e algumas consultas. E como todas estas propriedades são enunciadas para logaritmos com a mesma base, deve-se primeiro dominar a técnica da mudança de base dos logaritmos. Esta técnica deve ser usada para resolver questões que fornecem dados logaritmos em bases diferentes.

Existem duas maneiras de se mudar a base de um logaritmo. A primeira delas é geral, pois permite escrever logaritmos na base que quisermos. Veja como deduzi-la:

Da definição temos que: se $\mathbf{b^x = a}$, então $\mathbf{x = \log_b a}$.

Da mesma forma, sendo **y** e **c** reais positivos e não unitários tais que $\mathbf{c^y = b}$, então: $\mathbf{y = \log_c b}$.

Substituindo **b** por $\mathbf{c^y}$ na expressão $\mathbf{b^x = a}$, obtemos a potência de outra potência: $\mathbf{\left(c^y\right)^x = a}$, que pode ser escrita, conservando-se a base e multiplicando-se os expoentes, assim: $\mathbf{c^{x \cdot y} = a}$.

Então, novamente da definição temos que: $\mathbf{c^{x \cdot y} = a \Leftrightarrow x \cdot y = \log_c a}$, expressão em que os fatores **x** e **y** são respectivamente os logaritmos de a na base b e de b na base c. Portanto, temos que:

$$\log_b a \cdot \log_c b = \log_c a \quad \Leftrightarrow \quad \log_b a = \frac{\log_c a}{\log_c b}$$

Assim, para mudar de base, um logaritmo como $\mathbf{\log_b a}$, deve-se escolher uma nova base **c** e depois, reescrevê-lo como o quociente entre os logaritmos dos números **a** e **b**, ambos na base escolhida **c**.

A mudança de base pode ser usada para verificar, por exemplo, que o inverso do logaritmo de **a** na base **b** é o logaritmo de **b** na base **a**:

$$\log_b a = \frac{\log_a a}{\log_a b} = \frac{1}{\log_a b}$$

A outra maneira de mudar a base de um logaritmo é restrita às bases que sejam potências uma da outra, e parte do fato de que para todo n ≠ 0, temos que $\log_b a = \log_{b^n} a^n$. Assim, temos, por exemplo, que:

$$\log_2 3 = \log_4 9 = \log_8 27 = \log_{1/2} 1/3 = \log_{\sqrt{2}} \sqrt{3} = \ldots$$

Propriedades operacionais

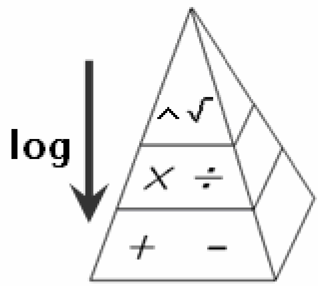
Sendo **X** e **Y** números reais positivos, **n** um real não nulo, e **b** um real positivo e não unitário, temos que:

O logaritmo do produto é igual à soma dos logaritmos dos fatores: $\log_b(\mathbf{x} \cdot \mathbf{y}) = \log_b \mathbf{x} + \log_b \mathbf{y}$

O logaritmo da razão é igual ao logaritmo do numerador menos o logaritmo do denominador: $\log_b\left(\frac{\mathbf{x}}{\mathbf{y}}\right) = \log_b \mathbf{x} - \log_b \mathbf{y}$

Regra do TOMBO: $\log_b(\mathbf{x^n}) = \mathbf{n} \cdot \log_b \mathbf{x}$

$$\log_b(\sqrt[n]{x}) = \frac{\log_b x}{n}$$



Observe que a aplicação de um logaritmo transforma multiplicações em adições, divisões em subtrações, potências em produtos e radiciações em divisões. É como se o logaritmo fosse capaz de rebaixar a classe de uma operação substituindo-a pela operação representada logo abaixo dela na pirâmide que representa a hierarquia das operações.

Uma vez satisfeitas as condições de existência então, mantendo-se a ordem inicial das operações no logaritimando, as propriedades operacionais dos logaritmos podem ser aplicadas simultaneamente. Exemplo:

$$\log_b\left(\frac{X \cdot Y^n}{\sqrt[m]{Z}}\right) = \log_b X + n \cdot \log_b Y - \frac{\log_b Z}{m}$$