



Geometria Euclidiana

O estudo da geometria Euclidiana parte de três conceitos primitivos: **ponto**, **reta** e **plano**. Estes conceitos são chamados de primitivos por não haver modo de defini-los sem que a definição de um dependa da definição do outro, ou sem que suas definições dependam de idéias definidas por estes três conceitos. Por exemplo, definimos a circunferência como sendo **o lugar geométrico dos pontos de um plano cuja distância a um determinado ponto deste mesmo plano, seja constante e não nula**.

Mais tarde definiremos os termos ‘lugar geométrico’ e ‘distância’ usados aqui. Por ora, perceba que, nesta definição da circunferência, se trocarmos a palavra plano pela palavra espaço, estaremos definindo a esfera.

O espaço geométrico é a totalidade do universo perceptível, mas a geometria surge como a ciência de se medir a terra, que embora coberta por diversos tipos de relevo, houve época em que os seres humanos afirmavam categoricamente que a terra era plana.

Deve-se ter em mente que o estudo da geometria visa adquirir a capacidade de atribuir corretamente valores para as áreas das figuras planas, pois, de forma prática, o valor de um pedaço de terra é estabelecido de acordo com o seu número de metros quadrados. Além disso, as expressões algébricas usadas para obter os valores destas áreas são abertas em variáveis tanto lineares quanto angulares, portanto, é necessário adquirir a capacidade de avaliar numericamente comprimentos e ângulos. Posteriormente, o estudo da geometria terá como meta adquirir a capacidade de avaliar volumes.

Voltemos a discutir as definições. Afinal, a geometria está repleta delas e mesmo assim não pode definir seus entes primitivos: o ponto, a reta e o plano.

Dizer que **ponto é a figura determinada na intersecção de duas retas secantes** ou que a **reta é o conjunto de todos os pontos do espaço que estão alinhados numa mesma direção**, pode muito bem ajudar na formação e compreensão destes conceitos. Mas não é o que se espera de um sistema de argumentação estruturado progressivamente como o da geometria euclidiana, pois, neste caso, uma definição depende da outra.

Forma, tamanho e posição

Em todo o estudo de figuras geométricas estão presentes três aspectos: a **forma**, o **tamanho** e a **posição**.

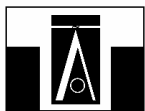
- Em alguns casos, uma única palavra define uma forma geométrica como círculo e cubo, mas não é o caso da palavra pirâmide, pois existem pirâmides de diferentes formatos. As palavras ponto, reta e plano também designam formas geométricas.

- Quanto ao tamanho das figuras, os termos grande, médio e pequeno não são suficientes para a comparação que o estudo da geometria se propõe. Avaliamos os tamanhos em diferentes níveis, o angular que não possui dimensão métrica, o linear que possui uma dimensão métrica, o superficial que possui duas dimensões métricas e o espacial que possui as três dimensões métricas. De certa forma podemos dizer que o tamanho de uma figura plana é o valor de sua área e que o tamanho de um sólido é o valor de seu volume. Vejamos o que se pode afirmar sobre os tamanhos dos entes primitivos da geometria:

	Dimensões	Tamanho		
		Comprimento	Largura	Altura
Ponto	ZERO	ZERO	ZERO	ZERO
Reta	UMA	INFINITO	ZERO	ZERO
Plano	DUAS	INFINITO	INFINITO	ZERO

- Finalmente o estudo da posição das figuras geométricas é na verdade uma forma de relacioná-las: “tal ponto pertence a tal reta que é perpendicular a uma outra reta tangente àquela circunferência de centro no vértice do quadrado...”.

Frases deste tipo estão presentes em diversos dos enunciados das questões de geometria que o candidato enfrentará em breve. Muitos dos enunciados das questões de geometria não apresentam figuras explícitas, mas sim de maneira descritiva utilizando-se do extenso vocabulário criado para a classificação das posições relativas entre os elementos da figura. O conhecimento deste vocabulário é decisivo para uma correta interpretação desses enunciados.



Existe outra abordagem do estudo das posições que também é feito de maneira relativa a um referencial arbitrário. Este modelo proposto por Descartes no século XVII é chamado de geometria analítica. Nesta abordagem, a posição de um ponto é designada por uma sequência de coordenadas numéricas e figuras como retas ou circunferências são descritas por equações algébricas. Os conhecimentos adquiridos no estudo deste capítulo são também fundamentais para um bom desempenho da análise dos gráficos feitos no plano cartesiano.

Eis aqui a nomenclatura usada para a comparação das figuras geométricas nos seus diferentes níveis:

IGUALDADE significa mesma forma, tamanho e posição	(F , T , P)
CONGRUÊNCIA significa mesma forma e tamanho	(F , T)
SEMELHANÇA significa mesma forma	(F)
EQUIVALÊNCIA significa mesmo tamanho	(T)

Notações

No estudo da geometria, temos o hábito de designar os entes primitivos da seguinte maneira:

- Letras maiúsculas para pontos
- Letras minúsculas para retas
- Letras gregas para planos

Assim, **P** e **Q** representam pontos, **r** e **s** retas e α e β planos. Letras diferentes podem representar uma mesma figura, mas uma mesma letra não pode representar números diferentes. Da mesma forma que, no estudo da álgebra, quando não sabemos os valores de dois números, temos o hábito de representá-los por x e y , mas isso não implica $x \neq y$. Há também outras formas de designar os entes primitivos como, por exemplo, duas letras maiúsculas podem representar uma reta, desde que as duas letras maiúsculas representem pontos distintos. Estas novas formas surgem da interpretação dos postulados da geometria euclidiana.

Postulados

A palavra vem do grego e significa “peço que aceite”. Os postulados são como as regras de um jogo, são afirmações sobre os entes geométricos primitivos (ponto, reta e plano) e outros entes definidos a partir deles como ângulo e circunferência. As afirmações feitas pelos postulados da geometria devem ser consideradas verdadeiras mesmo sem uma demonstração formal. Os postulados são baseados na experiência e na observação cotidiana do nosso espaço, e não devemos contrariá-los, pois neste caso não estaremos praticando a geometria euclidiana.

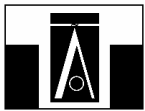
Os três primeiros postulados de Euclides em sua versão original escrita por volta de 300 a.C. são:

1. Traçar uma reta partindo de qualquer ponto determinado passando por qualquer outro ponto determinado.
2. Prolongar uma reta finita indefinidamente em uma mesma direção.
3. Descrever um círculo com centro em qualquer ponto determinado com extremidade em qualquer outro ponto determinado.

Em 1759 o matemático escocês John Playfair publicou um trabalho sobre a geometria de Euclides em que os postulados originais foram apresentados na versão que são conhecidos atualmente. Os dois primeiros foram resumidos pela afirmação de que “dois pontos distintos determinam uma única reta” e o terceiro foi enunciado como: “uma circunferência é determinada pela posição de seu centro e pela medida de seu raio”.

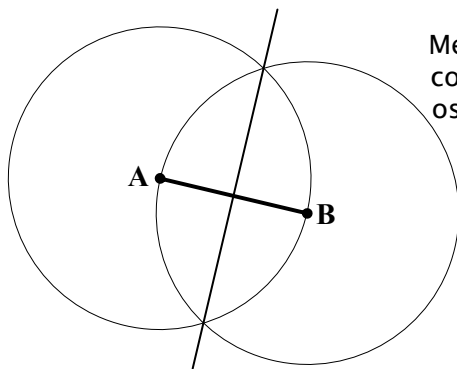
A principal diferença entre estes enunciados é que a versão original de Euclides soa como uma série de permissões, ao passo que a versão de Playfair os postulados são tratados como propriedades das figuras envolvidas. Talvez pelo fato de que no século XVIII a grande preocupação dos estudiosos da geometria era de formalizar logicamente suas teorias, mas na época de Euclides o conhecimento geométrico era predominantemente encarado pelo seu aspecto prático.

Quando estudamos geometria plana no ensino médio, criamos o hábito de resolver problemas métricos sobre figuras que já estão desenhadas, como calcular comprimentos ou áreas e, quando as figuras não estão desenhadas, costumamos desenhá-las à mão livre preocupando-se apenas em apresentar suas propriedades gráficas. As versões modernas dos postulados se adaptam muito bem para esse tipo de abordagem.

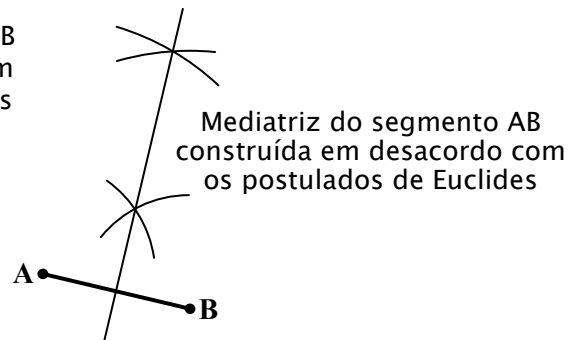


Já, na prática do desenho geométrico, as figuras devem ser construídas com régua e compasso da melhor forma possível. E, de acordo com os postulados de Euclides, nenhuma reta ou circunferência aleatória pode ser traçada a não ser que alguma propriedade **invariante** da geometria justifique essa escolha aleatória. Vejamos o exemplo da mediatriz de um segmento:

De acordo com os postulados originais, a mediatriz do segmento AB é a reta determinada pelos pontos de intersecção das duas circunferências de raio AB , mas para construí-la costumamos desenhar pequenos pares de arcos de circunferência com centros nos pontos A e B e mesmo raio, sendo que este raio pode ter qualquer medida maior do que a metade do comprimento do segmento AB .



Mediatriz do segmento AB construída de acordo com os postulados de Euclides



Mediatriz do segmento AB construída em desacordo com os postulados de Euclides

De acordo com o terceiro postulado de Euclides, dados os pontos A e B , as únicas circunferências que podem ser construídas são a de centro em A que passa por B e a de centro em B que passa por A . Uma vez construídas estas circunferências observa-se que elas se interceptam em dois pontos situados em lados opostos do segmento AB , e a reta que estes pontos determinam é chamada de mediatriz do segmento AB .

Agora, dentre as propriedades da mediatriz de um segmento, há uma garantindo que todos os seus pontos distam igualmente (eqüidistam) das extremidades do segmento. Sendo assim, ao construirmos um par de arcos de mesmo raio, com centros em A e B , obtemos um dos pontos da mediatriz do segmento AB , desde que este raio seja maior do que a metade do comprimento do segmento. E, se fizermos isso novamente, com um raio que pode até ser diferente do anterior então, obteremos outro ponto dessa mesma mediatriz.

Portanto, como foi postulado que dois pontos distintos determinam uma única reta, temos que a reta determinada pelos dois pontos obtidos na construção dos arcos de raios aleatórios só pode ser a mediatriz do segmento AB .

Obedecendo aos postulados

O desenho geométrico ou a ciência das construções geométricas limita-se ao estudo das figuras geométricas que podem ser obtidas, com régua e compasso, de acordo com os três primeiros postulados de Euclides. Por isso, devemos interpretá-los como permissões para o uso desses instrumentos de desenho. Sendo assim, os dois primeiros postulados de Euclides ditam as permissões para o uso da régua, ao passo que o terceiro postulado enuncia a maneira com a qual o compasso deve ser usado:

1. A régua pode ser usada para traçar o segmento que une dois pontos distintos já determinados.
2. A régua também pode ser usada para prolongar um segmento de reta já determinado.
3. O compasso pode ser usado para se traçar uma circunferência com centro em qualquer ponto já determinado, desde que passando por qualquer outro ponto já determinado.

Para efetuar-se uma construção postulada, o número mínimo de informações gráficas que devemos possuir é de dois pontos distintos, a partir dos quais poderão ser construídos: um segmento de reta (primeiro postulado), duas semi-retas (segundo postulado), e mais duas circunferências (terceiro postulado).

As três figuras que, nesta situação, podem ser obtidas pelos dois primeiros postulados serão colineares e, portanto, formadas pelos pontos de uma única reta. Além disso, as duas circunferências citadas interceptarão uma à outra, bem como essa reta, determinando 4 novos pontos.

No estudo do desenho geométrico, **um ponto só pode ser determinado por um cruzamento de duas linhas**, e como os instrumentos usados para a construção das linhas são apenas: a régua e o compasso, estas linhas só podem ser segmentos de reta ou arcos de circunferências.